MATEMÁTICAS PARA LA CABEZA Y LAS MANOS: LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA

Mª del Carmen CHAMORRO

Dpto. de Didáctica de las Matemáticas de la UCM

1. Un diagnóstico de la situación. Los problemas didácticos más relevantes.

La Geometría ha sido, y sigue siendo, la Cenicienta de las Matemáticas. Su enseñanza, casi siempre en el final del programa, se reduce a mínimos; los contenidos enseñados están generalmente mal coordinados con el resto de los aspectos matemáticos, y a menudo sólo se incluyen cuestiones de tipo "práctico" (sólo en apariencia) donde abundan definiciones y reglas memorísticas. Así, p.e, la enseñanza que se lleva a cabo en la escuela de la medida, se suele desvincular de importantes aspectos geométricos a tener en cuenta (los conocimientos espaciales necesarios para llevar a cabo una medida de un objeto físico con transporte del instrumento de medida, la forma de la superficie a medir, la forma más adecuada que debe tener la unidad, etc.), y no se aprovecha para presentar y motivar la necesidad de los números decimales. La visión de la geometría que se da es muy estática, usando tan sólo materiales clásicos como la regla y el compás, y cuesta trabajo introducir en la Enseñanza Primaria otros materiales llenos de posibilidades: geoplanos, poliminos, teselas, policubos o programas informáticos.

Además, los conocimientos geométricos que la escuela aporta a los alumnos, son de muy poca ayuda en la vida corriente, en la que el individuo se encuentra confrontado con problemas espaciales, no abordados en la escuela, que debe resolver para tomar decisiones y moverse con soltura en el espacio que le rodea (leer un plano de metro, usar un plano para no perderse en una ciudad desconocida, buscar el recorrido más económico, aprovechar de forma óptima un espacio, control de movimientos de los objetos que se transportan etc.).

Otro aspecto crucial en la enseñanza de la geometría, guarda relación con la interpretación de dibujos, figuras y esquemas. Raymond Duval ha mostrado que esa interpretación requiere la activación por parte del niño de complejos procesos semióticos que pasan inadvertidos para la mayoría de los profesores, que sin embargo, constatan y se quejan con frecuencia de la falta de visión espacial de sus alumnos, que es considerada como una aptitud innata que poco o nada tiene que

ver con los procesos de enseñanza, y que se tiene o no como un don natural similar a saber pintar, modelar o componer música. Duval, se muestra crítico con la enseñanza que se hace de la geometría, y así, refiriéndose al uso que se hace de las figuras, dice:

> *"Las figuras no son por tanto mas que representaciones que envían a otra cosa, "el espacio", que tiene múltiples aspectos: real, percibido, topológico, afín, proyectivo, métrico… Por tanto, ¿por qué hacemos una apuesta en el aprendizaje basada en la relación con las figuras?*
>
> *Las figuras reenvían necesariamente a un acto que es cognitivamente fundamental: ¡ver! Ahora bien, en los procesos de geometría este acto se convierte de golpe en problemático y es algo esencial. Pues toda mirada sobre una figura requiere un cuestionamiento que, a menudo, se hace en contra de la primera constatación perceptiva, contra lo que se ha reconocido en un primer vistazo: ¿qué es lo que es necesario ver sobre esta figura?, ¿qué representa?* (---) *las figuras en geometría no se miran como cualquier otra figura (una imagen, un esquema, un plano…) distinta de las que se dan en geometría".* [1].

Y ello, sin olvidar que estas competencias son también necesarias en otras materias como las artes plásticas. la geografía, el dibujo técnico y la tecnología en general. Así, un porcentaje muy elevado, no sólo de estudiantes, sino también de adultos, fracasa en una tarea, supuestamente sencilla, consistente en localizar en un plano de algún lugar conocido, por ejemplo la escuela, la posición de un objeto o dependencia, obteniéndose tres tipos de conductas[2]:

- el individuo es incapaz de mostrar en el plano el lugar que se le indica, no se plantea la necesidad de orientarlo, y ello a pesar de la constatación de contradicciones que su comportamiento produce, no comprende los efectos que produce la rotación del plano.
- el sujeto descubre la congruencia entre los dos espacios, físico y representado, a través de etapas sucesivas.
- el individuo toma en consideración la necesaria congruencia que debe existir entre el espacio físico real y el espacio representado en el plano, usando desde el primer momento, de manera pertinente, propiedades espaciales.

[1] DUVAL, R. (2003): Como hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y …una quinta, en CHAMORRO, M. C. (ed) (2003): Números, formas y volúmenes en el entorno del niño, MECD, Madrid.

[2] WEILL-FASSINA y RACHEDI (1992): Espaces graphiques et graphismes d'espace, La pensée sauvage, Grenoble.

Los datos obtenidos, a este respecto, por Salin y Berthelot[3] entre alumnos de la escolaridad obligatoria son alarmantes: un 40% de los alumnos no sabe utilizar convenientemente un plano ni servirse de él, y no comprenden las propiedades espaciales que se ponen en juego. Incluso entre los alumnos universitarios Parzysz[4] ha constatado el conflicto que estos estudiantes tienen cuando deben elaborar e interpretar representaciones planas de objetos del espacio, y como transfieren a la representación, sin ninguna variación, propiedades geométricas de los objetos, y al revés.

El vocabulario geométrico, que es un objetivo específico a alcanzar en la enseñanza de la geometría, tiene además una significación que a menudo contradice el uso que de ciertas palabras y expresiones se hace en el lenguaje corriente, por lo que muchas veces debe imponerse como una consecuencia del contrato didáctico, pues aparece como innecesario a los ojos de los alumnos (p.e. poner de manifiesto que todo cuadrado es un rectángulo, o que todo cuadrado es un rombo), siendo objeto preferente de enseñanza a la que se dedica la mayor parte del tiempo.

Más adelante sugeriremos actividades de reproducción, descripción, representación y construcción de objetos, que servirán para diferenciar y profundizar en el papel que juegan los objetos, las imágenes, los conceptos y las palabras en geometría.

La confusión que se produce en la enseñanza entre conocimientos espaciales y geométricos es constante, si bien tienen una problemática bien distinta. Los conocimientos espaciales se validan a través de la experiencia, (p.e., los movimientos necesarios para introducir un objeto voluminoso a través de una puerta), en tanto que los conocimientos geométricos requieren procesos de demostración formales. La enseñanza de la geometría se apoya sobre los conocimientos espaciales espontáneos que poseen los alumnos, olvidando que a veces son justamente esos conocimientos espontáneos los que constituyen un obstáculo para la adquisición de los conocimientos geométricos; pero por otra parte, en la enseñanza elemental es necesario partir de los conocimientos espaciales que posee el alumno, sin que sea realista la posición, mayoritaria entre los profesores, de establecer una ruptura entre los dos tipos de conocimiento, pues a su vez, los conocimientos geométricos contribuyen a resolver los problemas

[3] SALIN, M.H. y BERTHELOT, R (1992).: L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire, Thèse, Université de Bordeaux I.

[4] PARSYSZ, B.: Espace, géométrie et dessin. Recherches en Didactique des Mathématiques, 112.3, 211-240.

espaciales, por lo que estamos delante de una de las muchas paradojas que se presentan en la enseñanza de las matemáticas.

La enseñanza de la geometría se encuentra pues, plagada de fenómenos, muchos de ellos relacionados con el contrato didáctico, que hace falta poner sobre la mesa y analizar con minuciosidad.

2. Una breve síntesis de las teorías de Piaget.

Piaget distingue el *espacio perceptivo o sensomotor* del *espacio representativo*. Para Piaget, la representación prolonga en cierto sentido la percepción, y es una acción interiorizada que se produce en etapas graduales. Así, a la actividad sensomotora ligada a la percepción, le sigue la acción evocada después de realizada, hasta conseguir anticipaciones fragmentadas de acciones posteriores posibles, en torno a la etapa de las operaciones concretas (7-8 años a 11-12 años), cuando las acciones interiorizadas se estructuran en esquemas que se componen y coordinan alcanzando la reversibilidad, y dando lugar a un sistema propiamente operatorio. Lo que va a caracterizar a la etapa de las operaciones formales, es la coordinación entre distintos sistemas, que propicia la aparición de formas hipotético-deductivas en torno a los 12 años, hasta llegar finalmente a la axiomatización del espacio.

Cada etapa, según Piaget, va a incluir a la anterior y supone su reestructuración, lo que se corresponde con la jerarquía, hoy cuestionada, de las distintas geometrías: las relaciones topológicas (que conservan como invariantes las nociones de abierto-cerrado, interior-exterior, conexión, vecindad, continuidad, etc.) precederían a las relaciones proyectivas (se conservan las relaciones topológicas, así como las rectas y la convexidad), y éstas a las relaciones métricas (se conservan las propiedades topológicas y proyectivas, las distancias, los ángulos y el paralelismo, y en consecuencia la forma).

Como se ve, hay un largo espacio a recorrer hasta que el alumno domina la representación, los conocimientos espaciales tardan tiempo en formarse, por lo que muchas de las actividades que a veces se proponen a los alumnos van a chocar frontalmente con obstáculos de tipo ontogenéticos, al demandar competencias que los niños no han alcanzado en su nivel evolutivo. Otra consecuencia a resaltar es que, los conocimientos espaciales y geométricos no son una simple lectura extraíble por abstracción simple del espacio físico, sino que requieren, como conocimientos lógico-matemáticos que son, de la abstracción reflexiva, que supone coordinación de acciones de los espacios sucesivos, por lo que las prácticas ostensivas habituales de la escuela tradicional no son suficientes para asegurar el aprendizaje de los conceptos espaciales y geométricos.

3. Otras aproximaciones.

Ya hemos indicado que otros autores como Pécheux[5], García o Vecino[6] han cuestionado, como resultado de sus investigaciones, algunos resultados obtenidos por Piaget, fundamentalmente el paralelismo entre la adquisición de las relaciones espaciales y la jerarquía entre las distintas geometrías. Otra objeción clásica a Piaget, ha sido la rígida sucesión de estadios en función de las edades, estadios que son ahora considerados por muchos autores como potencialidades, y por tanto como meramente orientativos para los profesores, que deben sin embargo, prestar más atención a las características de las situaciones que proponen a los alumnos, en el sentido de si permiten o no la construcción de relaciones espaciales o son un mero compendio de definiciones y operaciones aritméticas.

Los trabajos últimos de Piaget, en colaboración con Ronaldo García[7], consideran tres tipos de representación espacial:

- la representación *intrafigural*, que se correspondería con la imagen mental relativa a las relaciones que se dan en una figura.
- la representación *interfigural* que se correspondería con la imagen mental relativa a las relaciones internas que se dan entre dos figuras.
- la relación *transfigura*l relativa a las relaciones, propiedades y estructuras figurales que pueden darse entre distintos objetos geométricos.

Vecino[8] continuando los trabajos anteriores, caracteriza estos tres tipos de representación como sigue:
"- Para la representación intrafigural: la estaticidad, independencia, indescomponibilidad, incapacidad de medida, adireccionalidad,…, de las figuras.

[5] PÉCHEUX, M.G (1990).: Le développement des rapports des enfants à l'espace, Paris, Nathan.
[6] VECINO, F. (1996): Los aspectos métricos de la representación espacial en los primeros años de la escuela elemental, (Tesis de Doctorado), Madrid, U.N.E.D. ,1996
[7] PIAGET , J. y GARCÍA, R. (1982): Psicogénesis e Historia de la Ciencia, México-España,Siglo XXI.
[8] VECINO, F. (2004): La consideración de distintas representaciones geométricas y su influencia en la proposición de una didáctica coherente de la geometría, en CHAMORRO, M.C (dir): Números, formas y volúmenes en el entorno del niño, MECD, Madrid, 14.

- Para la representación interfigural: dinamicidad, dependencia, componibilidad, posibilidad de medición, consideración de distintas direcciones,…, en las figuras.
- Para la representación transfigural diferenciación por invariantes, dependencia en base al espacio considerado, sistemas de medida, dirección, orientación y localización de las figuras."

Las investigaciones de Vecino, ponen en cuestión la prelación establecida por Piaget en la aprehensión de las relaciones espaciales por parte del niño, a saber: relaciones topológicas, después proyectivas y finalmente métricas, por lo que propone una enseñanza de la geometría caracterizada por los *grupos de invariantes* (topológicos, proyectivos o métricos) considerados de antemano, sin establecimiento de prelación alguna en las secuencias didácticas organizadas al efecto.

Otra fuente de fundamentación que debemos tener en cuenta, si queremos proponer un programa coherente de geometría, es el modelo de aprendizaje de Van Hiele[9], con los correspondientes niveles que este autor señala y las fases de aprendizaje que se deben producir para pasar de un nivel a otro. De los resultados de investigación, en particular el que señala que el paso de un nivel a otro no depende de la edad, puede deducirse como orientación didáctica, que el profesor puede provocar, a través de los contenidos y métodos de enseñanza, el paso de un nivel a otro, lo que es de gran importancia en el ámbito didáctico.

4. El tamaño del espacio.

En los trabajos de Gálvez y Brousseau[10], aparece por primera vez una variable importante a considerar en la construcción del espacio: el tamaño del espacio. Y así, hablan del micro, meso y macroespacio, que caracterizan como sigue:

- *El microespacio*.

Corresponde al espacio próximo, accesible a través de la manipulación y de la vista, en el que el desplazamiento de los objetos y el cambio de puntos de vista del propio sujeto son posibles. Las acciones ejercidas por el sujeto sobre los objetos le

[9] HIELE, P.M. van: Structure and insight. A theory of mathematic education, Londres, Academic Press, 1986.
[10] GÁLVEZ, G. (1985): El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una proposición para la enseñanza de la Geometría en la Escuela Primaria, Tesis doctoral, Centro de Investigaciones del IPN, México.

proporcionan una gran información. Otra característica importante del microespacio es el control que posee el sujeto de las relaciones espaciales con los objetos.

Como vemos, se corresponde con la percepción de relaciones meramente intrafigurales. El sujeto no tiene ninguna necesidad de elaborar representaciones o modelos de lo que sucede en el microespacio.

- *El mesoespacio.*

Es accesible a una visión global, por ejemplo el espacio que contiene un inmueble. En el mesoespacio, los objetos fijos constituyen puntos de referencia, y el sujeto se desplaza en función de la localización de los mismos. Las direcciones horizontal y vertical constituyen las direcciones básicas para la organización del mesoespacio.

La construcción del mesoespacio requiere la integración de los diferentes puntos de vista que el sujeto va obteniendo en sus deplazamientos, a modo de yuxtaposición de representaciones parciales. Se construye poco a poco una visión de conjunto, en la que el mesoespacio tiene extensión, por lo que la noción de distancia entre objetos, al igual que la noción de ángulo, cobran gran importancia.

- El macroespacio

Imposible de percibir globalmente, requiere que el sujeto se desplace y vaya integrando, con continuidad, diferentes visiones obtenidas por desplazamiento sobre la superficie terrestre, lo que demanda una conceptualización, esto es, una representación global.

Dentro del macroespacio se distinguen tres tipos: el urbano, el rural y el marítimo, que como es evidente, proporcionan posibilidades bien distintas de obtener puntos de referencia que ayuden a estructurar la representación del espacio. Para la organización del macroespacio basta con dos dimensiones, obviando la altura, y se requiere coordinar el sistema de referencia corporal (delante-detrás, derecha-izquierda) con un sistema de referencia externa al sujeto que no varíe con sus deplazamientos.

Parece razonable la hipótesis de que "la necesidad de conceptualización y representación del espacio, es inversamente proporcional a la cantidad de información que ese espacio proporciona".

Más adelante veremos, que el tamaño del espacio es una variable didáctica que hay que considerar a la hora de diseñar situaciones didácticas para la enseñanza de la geometría.

5. Epistemología, geometría y enseñanza.

La polémica sobre qué hay que enseñar de geometría, viene de muy atrás. Antes que Felix Klein presentase en 1872 su famoso programa de Erlangen la enseñanza de la geometría se reducía al trabajo con los Elementos de Euclides, se realizaba por tanto, un trabajo fundamentalmente deductivo, con una visión de la geometría muy abstracta y estática, basada en las construcciones geométricas con regla y compás, aspectos que todavía se dejan sentir en la enseñanza actual.

Sin embargo, la influencia de Klein será notable, y así, la matemática moderna va a dar a luz una concepción de la geometría basada en la idea de conservación de invariantes por transformaciones geométricas biyectivas: traslaciones, simetrías, rotaciones, lo que va a dar lugar a la consideración del espacio topológico, el espacio proyectivo y afín, y el espacio euclídeo o métrico.

Por otra parte, autores como Ferdinand Gonseth[11], matemático y filósofo de la ciencia, ginebrino como Piaget, y que dice haberle enseñado todo lo que éste sabía de matemáticas, mantiene, con mucho sentido, que la actividad geométrica resulta, en el mejor de los casos, de una armoniosa articulación entre *intuición, experiencia y deducción*, defendiendo que la geometría debe mantener relación con el espacio y el mundo sensible, lo que ofrece nuevas perspectivas desde un punto de vista didáctico.

El epistemólogo francés Rudolph Bkouche en sus reflexiones sobre la geometría[12], nos ayuda a esclarecer cuál es su naturaleza, distinguiendo tres aspectos:

- la geometría como ciencia de las situaciones espaciales,
- la geometría en relación con otros dominios de conocimiento (cartografía, geodesia, física, astronomía, etc.), y
- la geometría como lenguaje y representación, fundamento de la geometrización, considerada esta como modo de representación de fenómenos en los que no intervienen cuestiones espaciales (p.e. la resolución gráfica de ecuaciones de segundo grado, o las geometrías no euclídeas).

[11] GONSETH, F. (1926): Les fondements des mathématiques, Paris, Blanchard.
[12] BKOUCHE, R. et al. (1991): Faire des mathématiques : le plaisir su sens, Paris, Armand Colin.

La geometría, en tanto que dominio de conocimientos del mundo, se centra en la medida de magnitudes (longitudes, superficies y volúmenes), y la representación plana de situaciones espaciales, aspectos que la enseñanza ha desarrollado tradicionalmente, además con poco acierto, al menos en lo que se refiere a la medida de magnitudes, dejando de lado los otros aspectos. Si a esto se une que los presupuestos de Klein eliminaban las situaciones espaciales en tanto que tales, el resultado ha sido una enseñanza de la geometría pobre y sesgada, en la que se ha manipulado poco -geometría sólo para la cabeza, no para las manos-, y se ha olvidado que el individuo posee y debe desarrollar conocimientos espaciales, pues no olvidemos que la geometría corresponde, al menos en parte, a la modelización del espacio físico. A este respecto dice Bkouche[13]:

"(…) la enseñanza de la geometría debe apoyarse sobre el estudio de las situaciones espaciales, ya sea desde el punto de vista de la medida o del dibujo; es sobre los objetos de naturaleza empírica (que constituyen las situaciones espaciales) como se construye la racionalidad geométrica (…..) A falta de este proceso las grandes estructuras carecen de sentido, y dan lugar al saber escolar al que antes nos hemos referido."

Los estudios antropológicos ponen de manifiesto, tal y como afirma Pécheux, que las capacidades espaciales de los individuos son muy variables según las distintas sociedades y épocas; estas capacidades espaciales se construyen a través de las acciones que el niño lleva a cabo en el entorno, lo que depende, evidentemente, de las oportunidades tanto del entorno físico como social, lo que explicaría la gran variabilidad de unos individuos a otros, y la dificultad de definir una trayectoria que dé cuenta del desarrollo espacial de los individuos. He aquí una importante pista cara a la enseñanza. Una vez más, sin acción no hay posibilidad de construir conocimiento.

Otro aspecto, a tener en cuenta, es que los niños "*modelizan el espacio mediante la manipulación de formas geométricas*" lo que proporciona una referencia importante para construir las situaciones didácticas que determinarán la introducción de la geometría en los primeros niveles, y donde los materiales deben estar muy presentes. Hacemos notar que en geometría, la interacción se produce con un medio distinto del entorno, no hay objetos ni espacio físico, se trata ahora de un espacio conceptualizado formado por las figuras, los dibujos y los esquemas.

[13] BKOUCHE, R.: Op. cit, 161

6. El uso de la ostensión en geometría. El caso particular de las figuras.

Si hay una rama de las matemáticas donde la ostensión[14] funcione de manera habitual, esta es la geometría. En geometría la existencia de representaciones, que necesitan utilizar la percepción, favorece la aparición de la ostensión.

La enseñanza de la geometría nos sitúa, de manera inmediata, delante de las figuras, y es a través de las figuras como los enseñantes, practicando una presentación ostensiva, van haciendo aparecer los nuevos objetos de la geometría, las definiciones, las propiedades. Basta con mostrar, hacer observar una figura para que el alumno abstraiga lo que el maestro desea. A base de mirar, el alumno debe reconocer un triángulo, distinguir uno equilátero de otro isósceles o rectángulo. Se trata de practicar un medio económico, de fácil gestión didáctica, por el que el alumno pueda establecer características, que le permitan, después, reconocer los objetos, y que tiene a la vez la virtud de unificar, al menos en apariencia, las concepciones de los alumnos, creándose la ilusión de que todos tienen un repertorio común, lo que permite al maestro ir más deprisa en la enseñanza.

El contrato didáctico que sustenta la ostensión, con la coartada de practicar la inducción, deja bajo la responsabilidad del alumno el establecimiento de relaciones entre los conceptos que se le enseñan y la realidad física del mundo sensible. En este contrato, al profesor le toca *mostrar* y al alumno *ver*, por lo que de manera indirecta el profesor exige al alumno la comprensión de lo que él quiere que vea, creándose la falsa ilusión de que *ambos deben ver lo mismo*. Pero cuando este contrato se rompe, porque el alumno no ve, el profesor debe actuar y buscar los medios para enseñarle a leer la figura.

Un caso paradigmático de ostensión lo constituye la medida de magnitudes. He aquí algunos ejemplos:

- el uso de objetos muy decantados para presentar una nueva magnitud: hilos, cuerdas, alambres, etc., para la longitud; mesas, suelo, hojas para la superficie; objetos voluminosos para el volumen, etc. El objetivo es decantar sin esfuerzo, la magnitud que se quiere mostrar. La decantación se da hecha y el alumno sólo debe aprehender lo que se muestra.

[14] Del latín *ostendere*, que significa presentarse con insistencia, es decir, ostentar.

- como medir es una actividad costosa en tiempo y esfuerzo que requiere una gestión de la clase compleja, en la práctica habitual es el maestro el que mide, como mucho hace medir a un buen alumno. La ficción ostensiva hace creer que a medir se aprende mirando. En el contrato didáctico clásico que sustenta la medición, la responsabilidad de usar bien el instrumento de medida (p.e. colocar el 0 de la regla en el origen del objeto a medir, mantener la regla paralela a la longitud objeto de medición, transportar la regla sin dejar huecos y sin encabalgamientos, adaptar el instrumento de medida al objeto a medir, caso de objetos redondos, etc.) pasan a ser conocimientos que están bajo la responsabilidad del alumno y que gozan de *invisibilidad didáctica*[15].
- la graduación de los instrumentos de medida nunca es construida por los alumnos, ni siquiera se hace un trabajo mínimo para asegurar que éstos la comprenden, se sobreentiende que se trata de algo sencillo que el alumno puede aprender por si mismo. Por el contrario, nosotros hemos probado en nuestras investigaciones que se trata de un concepto difícil, y que el fenómeno que hemos denominado *funcionamiento icónico de la graduación*[16], es más general de lo que pudiera parecer.

Este fenómeno didáctico de *ostensión no asumida*, disfrazada, tiene mucho que ver con las limitaciones del sistema didáctico (poco tiempo, falta de medios materiales adecuados, falta de preparación para poder hacer algo distinto, etc.) y aparece como una solución de compromiso que el profesor adopta para salir del atolladero. Puesto que el uso de la ostensión en la enseñanza de la geometría es inevitable, pues en la enseñanza elemental no podemos, por ejemplo, definir qué es un punto, una recta o un plano, hay que mostralo, es necesario que el profesor ejerza sobre ella un control consciente, limitándola al mínimo, y sobre todo, creando situaciones de aprendizaje que permitan a los alumnos una verdadera construcción de los conceptos puestos en juego en la situación.

[15] Usamos este término para designar el tratamiento que se da a ciertos conceptos que no aparecen nunca reflejados en los programas oficiales, libros de texto, y en la práctica habitual de la clase. Son conceptos no contemplados, invisibles para la didáctica, que están fuera del tiempo didáctico.

[16] Lo que caracteriza al funcionamiento icónico de la graduación, es que el alumno reproduce sobre el instrumento a graduar el dibujo de la graduación, guardando todas las similitudes formales de tipo icónico (trazos grandes y pequeños, mismo número de trazos pequeños entre dos grandes, distancia en blanco entre el extremo de la cinta métrica, de 1metro de extremo a extremo, y el 0, etc.) pero no considera aspectos fundamentales como la invariancia de la unidad, obteniendo centímetros de varios tamaños distintos, haciendo una numeración incorrecta, etc. Para más información ver CHAMORRO, M.C.: Las dificultades de aprendizaje de las magnitudes, MECD, Madrid, 2001.

En cuanto a las figuras se considera, de manera general, que constituyen un medio adecuado para transmitir saberes geométricos, sobre todo en la enseñanza elemental, y no se problematiza su uso. Pero un mínimo de reflexión permite descubrir las muchas cuestiones que cabe plantearse:

- ¿cuál es la naturaleza de los objetos que representan las figuras?, ¿qué relaciones mantienen los objetos representados con las figuras?
- ¿son estas representaciones estereotipos, fruto de convenciones sociales o culturales, capaces de enmascarar las verdaderas propiedades geométricas subyacentes? (p.e. un triángulo apoyado siempre sobre una base, un cuadrado reposando siempre sobre un lado, un rectángulo en el que la longitud de la base es siempre mayor que la de la altura etc.)
- ¿interpreta el alumno las figuras como algo particular, o cómo algo que reenvía a objetos teóricos con propiedades genéricas? (p.e. todos los triángulos rectángulos, un paralelogramo que representa, por qué no, también un cuadrado)
- ¿qué papel juega la percepción en la aprehensión de las representaciones?, ¿en qué medida la aprehensión de los aspectos figurativos colabora en la construcción de los saberes geométricos teóricos?, ¿es justamente la percepción un obstáculo para la elaboración de esos saberes teóricos?

Muchas de estas preguntas han sido ya respondidas total o parcialmente en investigaciones como las de Duval[17] y Fregona[18], algunos de cuyos resultados vamos aquí a recoger.

Duval va a analizar las diferentes maneras de ver, distinguiendo entre visualización icónica y no icónica.

Se usa la *visualización icónica* para reconocer un objeto, cuando este reconocimiento se hace a través de las formas, del parecido con el objeto real que representa, o por comparación con un modelo tipo de formas. La semejanza permite el reconocimiento de la forma o del contorno del objeto real ya encontrado. Las figuras prototípicas juegan aquí un papel importante (el cuadrado debe estar en la posición habitual, el largo y el ancho de un rectángulo deben guardar una cierta proporción, etc.), pero no hay que olvidar que, con frecuencia, las figuras prototípicas se constituyen en un obstáculo didáctico.

[17] DUVAL: Op. cit. Capítulo 4.

[18] FREGONA, D. (1995): Les Figures planes comme « milieu » dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transposition didactique, Thèse Université de Bordeaux I.

En la *visualización no icónica* el reconocimiento de las formas se hace a través de deducciones basadas en el uso de propiedades enunciadas, definiciones o teoremas.

La ruptura entre estas dos formas de ver es evidente y tiene gran importancia, ya que la visualización no icónica es la pertinente en geometría, y pasar de una actividad a otra supone un gran salto. Duval postula que: *"El reconocimiento icónico de las formas supone handicaps considerables en relación con la manera de mirar que todo proceso geométrico exige"*.

Así, una consecuencia de la manera de ver icónica, es la confusión entre área y perímetro, pues en este tipo de visualización no se consideran las propiedades que no estén ligadas al contorno característico de la forma. Igualmente, cualquier tarea basada en la transformación y reconstrucción de una forma, imprescindible por ejemplo para deducir el área de los polígonos elementales, fracasa, al aparecer las formas en esta visualización como estables.

Algunos autores sugieren que, puesto que en geometría las producciones son de dos tipos, trazados y textos, las situaciones que se presenten a los alumnos deben incluir tanto figuras como enunciados discursivos, lo que no supone, tal y como sucede en el contrato didáctico habitual, que la figura sea una mera ilustración del enunciado discursivo.

Las investigaciones de Balacheff[19]han probado que la construcción de los conocimientos geométricos requiere sobrepasar el nivel de la percepción, de manera que la iniciación al razonamiento deductivo que requiere la geometría, a partir de la ESO, debe hacerse en contra del recurso al dibujo. Se entra así en un viejo dilema: ¿son los datos obtenidos a través de la percepción, elementos claves para la construcción de saberes teóricos?, o por el contrario ¿los saberes teóricos se construyen contra los datos provenientes de la evidencia? Lo cierto es que, a menudo, el dibujo se erige como un obstáculo para la demostración, que aparece como innecesaria.

Por ello, la enseñanza de la geometría requiere que el profesor controle en todo momento el resultado de sus decisiones, sabiendo que se están utilizando sistemas

[19] BALACHEFF,N (1988): Une étude des processus de preuve en mathémaqtique chez les élèves de Collège, Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble,

de significantes distintos: objetos, representaciones, lenguaje natural y código específicamente matemático.

7. Perspectivas didácticas para la geometría.

Dos concepciones de la enseñanza de la geometría van a confrontarse y a veces coexistir, no siempre con fortuna, oscilando históricamente entre estos dos polos:

- un discurso basado en la racionalidad, lleno de expresiones lingüísticas carentes de significado para la mayoría de los alumnos, que intenta dar cuenta de un saber sabio[20] y que suele obtener como resultado un saber escolar banal.

- por reacción, un activismo con aspecto de "modernidad" que usa múltiples materiales, pero que finalmente se reduce al bricolaje, pues los profesores no saben por qué ni para qué los usan; y es un hecho que, con frecuencia, la manipulación enmascara la ausencia de saberes.

En estos momentos parece haber acuerdo[21] en el sentido de que la geometría a enseñar en el nivel elemental debe tener como objetivo el proporcionar un conocimiento familiar del espacio, que permita a cada individuo dominar su entorno, a la vez que proporcionarle un punto de apoyo para el aprendizaje de la geometría. No se trata pues de realizar un trabajo en el que prime la deducción, sino que, por el contrario, debe basarse en la intuición y la experiencia de los alumnos enfrentados a la resolución de situaciones especialmente diseñadas, y al trabajo con materiales, que van a ayudarle a desarrollar imágenes y representaciones mentales.

Se retoma el objetivo de adquirir una cierta familiaridad con los objetos del plano y del espacio, se da prioridad a la geometría de las formas y los volúmenes, antes de hablar de las figuras en geometría, y se recalca la importancia de realizar un trabajo específico con las figuras para "enseñar a ver", sirviéndose para ello de las actividades de análisis y reproducción de figuras. Se quiere evitar así una enseñanza de la geometría que se reduzca al aprendizaje del vocabulario y de algunos conceptos demasiado formales.

[20] Las expresiones saber sabio y saber escolar, se utilizan en el sentido de Chevallard.

[21] KAHANE, J.P. (2002): L'enseignement des sciences mathématiques, Comisión de reflexión sur l'enseignement de mathématiques. Rapport au ministre de l?Éducation Nationale, Paris, Odile Jacob.

Dentro de la perspectiva didáctica, autores como Enma Castelnuovo[22] y Bruno D'amore, han defendido la necesidad de enseñar una *geometría dinámica* frente a la geometría estática tradicional. Los libros, ya antiguos, de Castelnuovo, cuya lectura recomendamos, están repletos de propuestas interesantes que ejemplifican cómo trabajar la geometría de una manera dinámica, propuestas que hacen abundante uso de materiales fabricados *ad hoc* y que ahora pueden encontrarse en el mercado con facilidad: geoplanos, poliminos, policubos, pantógrafos, teselas, etc.

Al igual que Castelnuovo, Claudi Alsina[23] en nuestro país, propugna una geometría fundada en procesos de *percepción*, *representación, construcción*, *reproducción* y *designación* de los entes geométricos considerados en cada caso. Una geometría que tenga en cuenta el *carácter deductivo* intrínseco al razonamiento geométrico pero también el *carácter inductivo* que pueden generar los diversos procesos o materiales propuestos para el desarrollo de la misma.

Si según Gonseth, el conocimiento del espacio se constituye a través de la deducción, la intuición y la experiencia, la escuela elemental, que no puede, por razones evidentes, trabajar con los alumnos sobre la deducción formal, si puede sin embargo favorecer la intuición de los alumnos y aumentar sus experiencias tanto espaciales como con materiales de naturaleza geométrica.

Coincidimos plenamente con estos autores, y puesto que el trabajo con materiales va a llevarse a cabo en las sesiones posteriores del curso, tan sólo vamos a indicar cómo modelizar a través de situaciones didácticas, actividades de interés en geometría.

7.1. El trabajo con materiales en geometría.

El dominio de ciertas técnicas por parte de los alumnos del primer ciclo: plegado, recortado, ensamblado de piezas, de barras de mecano, etc., es necesario para poder realizar actividades posteriores de tipo práctico sobre las que fundamentar los conocimientos geométricos (matemáticas para la cabeza), por lo que creemos que la manipulación de materiales (matemáticas para las manos) es realmente necesaria. Sin esta experiencia sensible, cualquier intento de formalización es inútil y está destinado al fracaso. Dotar a los alumnos de técnicas empíricas para comprobar por ejemplo, si dos figuras son simétricas, si un ángulo es recto, o si un

[22] CASTELNUOVO, E. (1973).: Didáctica de la matemática moderna, México, Trillas.
[23] ALSINA C. et al. (1988): Materiales para construir la Geometría, Síntesis, Madrid.

cuadrilátero es un cuadrado, es más importante en estos niveles que saber definir una simetría, un ángulo recto o un cuadrado.

En el segundo y tercer ciclo, además del dominio de ciertas técnicas ya utilizadas (plegado, trazados), la utilización de ciertos instrumentos (compás, escuadra, construcciones) y de un cierto lenguaje (que incluye vocabulario y fórmulas) es ya, conveniente. Hay que aprovechar el gran atractivo que tienen en estas edades los juegos de construcción, y usar los legos, mecanos, polidrones y otros materiales de este tipo, gracias a los cuales muchos conceptos geométricos se hacen intuitivos.

Por ejemplo, por citar tan sólo algunos de los materiales más representativos:

- los mecanos ayudan a visualizar las aristas de los sólidos, las deformaciones isoperimétricas de un polígono que ayudan a diferenciar área y perímetro.
- los legos y policubos materializan bien la noción de volumen y ayudan a encontrar, por pavimentado, la fórmula del volumen de un paralelepípedo..
- los geoplanos permiten la construcción de polígonos, regulares o no, poniendo el acento en lados y vértices, y permitiendo con las gomas elásticas la transformación, descomposición y recomposición de polígonos, ejercicios de geometría dinámica necesarios par comprender después, de dónde salen las fórmulas que dan el área de los polígonos elementales. El descubrimiento de la fórmula de Pick ofrece la posibilidad de encontrar el área de superficies irregulares.
- los poliminos, con los que se pueden plantear problemas interesantes que ayudan al alumno a estructurar su búsqueda, permiten distinguir área y perímetro y observar su diferente variación, rompiendo la falsa concepción de que a igual perímetro igual área.
- el polidron permite la construcción de sólidos, distinguir las nociones de caras, vértices y aristas, pudiéndose trabajar la fórmula de Euler.
- las teselas favorecen la apreciación de la noción de ángulo y pavimentado del plano, así como de los movimientos elementales: traslación, giro y simetría.
- el tangram favorece la comprensión de las nociones de ángulo y superficie, y ayuda a romper la falsa concepción de que la conservación de la superficie supone la conservación de la forma.

En la actualidad se dispone de innumerables materiales, que utilizados más allá del bricolaje, permiten hacer una geometría dinámica y divertida en la escuela.

7.2. El papel del lenguaje en la enseñanza de la geometría.

Ya hemos indicado que el lenguaje de la geometría no es el lenguaje natural que usamos en nuestras actividades sociales, y que constituye en sí mismo un objetivo de aprendizaje. Por esta razón, las situaciones de comunicación, y evidentemente también las de acción, van a jugar un papel importante, y van a permitir fijar el lenguaje, a través de las tareas de: reproducir, describir, representar y construir un objeto. La comunicación va a exigir la constitución de un repertorio común, de un lenguaje, y es aquí donde el maestro debe entrar, proporcionando un lenguaje matemático que tenga sentido para todos.

- *Reproducir*: El alumno dispone de un modelo y debe realizar una copia conforme de ese objeto. Esta actividad requiere: analizar el objeto, sus propiedades, buscar medios para reproducirlo, utilizar instrumentos y técnicas (por ejemplo saber trazar paralelas, ángulos rectos, etc.). Por ejemplo, reproducir sólidos geométricos con ayuda de un patrón o de un material tipo polidrón, reproducir un sólido que puede manipularse, etc. Reproducir figuras planas con ayuda de un tangram, usando regla y escuadra, reproducir un pavimentado, etc.

- *Describir*: Saber describir es saber comunicar la información geométrica necesaria que permita identificar, reproducir o representar un objeto. Es una clara actividad de comunicación que permite pasar del objeto físico a un discurso sobre la representación figurativa que se ha hecho de ese objeto, y que ayuda al alumno a adquirir el lenguaje geométrico de manera comprensiva. La descripción puede tener como objetivo identificar el objeto entre varios, reproducir su figura o construirlo, lo que hará variar las características y exigencias de la descripción necesaria para realizar con éxito la tarea. No hay por tanto una única descripción del objeto, y esta descripción suele estar estrechamente ligada a usos y convenciones sociales o del grupo, por lo que este tipo de actividades proporciona la ocasión para fijar y distinguir la terminología geométrica de la convencional.

- *Representar*: Describir un objeto a través de medios convencionales escritos o gráficos. Es importante saber escoger los medios de representación más adecuados, usando el modo convencional de designar ángulos, segmentos, etc. La búsqueda de distintos patrones de un sólido, por ejemplo, es una actividad de representación.

- *Construir*: Se trata de reconstruir el objeto partiendo de una descripción o de una representación del mismo. Una situación de comunicación a la que el alumno no le asociase un modelo de acción eficaz para construir el objeto descrito, estaría inacabada.

Las actividades que acabamos de enunciar, suponen una negociación constante entre la percepción de la *figura material*, la *figura representada* y la *figura construida* de acuerdo con las informaciones recibidas.

8. El oscuro tratamiento de la medida de magnitudes.

Un caso particular dentro de la geometría lo constituye la medida de magnitudes, que suele aparecer como un bloque independiente y con entidad propia dentro de los curricula, por lo que queremos hacer algunas reflexiones sobre su enseñanza.

La transposición didáctica de la medida de magnitudes[24] se caracteriza, entre otras cosas, por la existencia de una gran variedad de términos y el uso de un vocabulario flotante que designa de forma indistinta tanto acciones como conceptos de naturaleza matemática y social bien distintas. Lo anterior no es sino un signo externo del deficiente tratamiento que recibe la medida tanto en la enseñanza primaria como secundaria, en las que abundan los errores de tipo matemático y se obvian importantes aspectos de la medida de magnitudes, obteniéndose como resultado una transposición didáctica reductora e incompleta, que bajo el pretexto de enseñar aspectos prácticos útiles para la vida corriente, dedica la mayor parte del tiempo al aprendizaje de procesos algoritmizados de escasa utilidad más allá de los ejercicios escolares.

El concepto de magnitud está ausente de los curricula, sin que preocupen los problemas de decantación y apreciación de cada magnitud en particular, y sin que haya un trabajo sistemático sobre los métodos de comparación, lo que es ciertamente complejo en magnitudes como la superficie o el volumen.

Los aspectos relativos a la medida de una magnitud tienen un tratamiento confuso que mezcla e identifica: la medida en tanto que aplicación, la imagen obtenida mediante esa aplicación y la medida concreta dada por un número y una unidad.

[24] Para más información, ver CHAMORRO, M.C (1998).: Fenómenos de enseñanza de la medida en la escuela elemental, UNO, 18.

Unidad e instrumento de medida aparecen muchas veces como intercambiables, y hay un predominio casi absoluto de unidades provenientes del Sistema Métrico Decimal.

La medición es casi siempre ficticia y tiene un claro carácter ostensivo, que tiene por finalidad sustituir la medición en la realidad de objetos concretos. Por ello las nociones de aproximación, estimación y orden de magnitud no suelen estar contempladas y desarrolladas en los curricula. Hay identificación de entornos en algunos casos, y ausencia de otros que son sistemáticamente ignorados, por lo que las manipulaciones a que se somete el saber sabio de referencia a efectos de ser enseñado, producen reducciones y graves modificaciones que pueden calificarse de ilegítimas desde un punto de vista epistemológico.

El descubrimiento y aplicación de los criterios de equivalencia en una magnitud, no son objeto de trabajo específico, por lo que se recurre a la comparación a través de los resultados obtenidos por medición, produciéndose así un deslizamiento epistemológico que sustituye las actividades de medida por meras actividades de tipo numérico.

Así, la medida concreta de los objetos, expresada por un número y una unidad, sirve de soporte a la mayoría de las actividades que se proponen a los alumnos, sustituyéndose las engorrosas prácticas de medición de objetos por operaciones aritméticas elementales o ejercicios de ordenación de números, que suplen las tareas de clasificar y ordenar objetos atendiendo a una magnitud. La mayoría de los problemas que tratan de medida parten en sus enunciados de medidas concretas ya realizadas, por lo que el trabajo a realizar se reduce a su adición o sustracción, o bien multiplicación o división por un número natural, respondiendo claramente a enunciados típicos de problemas aditivos. En el caso de las magnitudes pluridimensionales la correspondencia con los enunciados de producto de medidas es total: conocidas las dimensiones lineales hay que encontrar la superficie o el volumen, o bien, conocidas la superficie o el volumen y la otra u otras dimensiones hay que encontrar la que falta.

Hay por tanto una clara sustitución de saberes en la que los verdaderos problemas de medida se sustituyen por problemas aritméticos, los procesos de medición por el uso de fórmulas, y los ejercicios sobre conversiones, que ocupan más de la mitad del tiempo de trabajo dedicado a la medida, son un mero ejercicio de numeración decimal.

Muchos conocimientos de medida de gran uso social habían dejado de enseñarse por considerar que podían aprenderse de forma privada; tal es el caso de los procedimientos de medición, el manejo de instrumentos de medida, el uso y lectura de instrumentos graduados y la estimación de medidas. Sin embargo, los profundos cambios sociales, así como los avances tecnológicos en metrología, han desterrado la mayoría de las prácticas sociales de medición, de manera que los conocimientos que antes podían extraerse del ámbito privado son ahora muy escasos. Los metros láser han desplazado a la cinta métrica, las balanzas digitales a las de platillos, los objetos industriales a los artesanales, y con ello se ha privado a los alumnos de las experiencias necesarias para conceptualizar las nociones de medida, por lo que la escuela debería replantearse de forma urgente retomar a su cargo esos aprendizajes.

8.1. Los obstáculos en medida.

A los efectos reductores de la transposición didáctica hay que unir las prácticas habituales, productoras de obstáculos didácticos, que refuerzan a menudo obstáculos epistemológicos constatados y tipificados. Tal es el caso de:

- el uso casi exclusivo, como objetos soporte de las diferentes magnitudes, de objetos idealizados, previamente decantados, provenientes casi siempre del microespacio, dibujados la mayoría de las veces, y matematizados en el caso de la superficie y el volumen (polígonos y poliedros), que dificulta el reconocimiento en la realidad y en los objetos cotidianos de la magnitud correspondiente, convirtiendo las mediciones en acciones casi imposibles.

- el constante ejercicio de conversiones de unidades, expresando una medida en unidades sucesivamente distintas y de diferente orden de magnitud, que tiene como efecto la imposibilidad de fijar el orden de magnitud de los objetos más comunes, destruyéndolo en algunos casos, e imposibilitando la consecución de un objetivo importante en medida: la estimación.

- la costumbre habitual de dar las superficies dibujadas y no recortadas, constituye un obstáculo didáctico que favorece la identificación perímetro/superficie. Esta representación favorece la identificación de la superficie con el borde, permitiendo la confusión entre el objeto representado y el contenido de la representación. Esta práctica impide, además, la aparición de procedimientos de comparación de superficies, que contribuyen a instalar en los alumnos una concepción geométrica de la superficie.

- el tratamiento estándar del cambio de unidades, que es un problema clave para comprender el concepto de medida, utiliza un procedimiento algorítmico basado en la memorización (escalera, casillas de unidades, etc.), altamente didactificado, y que nada tiene que ver con el problema conceptual del cambio de unidades. El desarrollo de las representaciones que se hace un individuo en torno al cambio de unidades, está ligado a la adquisición e interiorización de distintas representaciones del mismo hecho, y que tienen tanto un soporte verbal como manipulativo, geométrico o aritmético, por lo que la práctica habitual en nada contribuye a tales propósitos.

Por ello:

• La medición real de objetos diversos tomados del entorno cotidiano, es una actividad didáctica no sólo conveniente, sino también posible, si bien exige un gran esfuerzo de preparación didáctica por parte del profesor. La medición es la puerta de entrada para abordar cuestiones inherentes a la medida como son el problema del error y la aproximación.

Para asegurar la comprensión y descubrimiento de las relaciones entre unidades, es necesario recurrir a actividades de manipulación, tanto en el marco aritmético como geométrico. En particular, abordar el Sistema Métrico Decimal sin haber tratado previamente el cambio de unidades no convencionales, dificulta, y puede llegar a imposibilitar, la comprensión de las regularidades propias del mismo.