

LEER, COMPRENDER, RESOLVER UN PROBLEMA MATEMÁTICO ESCOLAR

M.^a del Carmen Chamorro Plaza
Catedrática de Escuela Universitaria de Didáctica de las Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

1. El tratamiento y la resolución de problemas.
 - 1.1 Algunos modelos de resolución de problemas.
2. La lectura y comprensión de enunciados.
 - 2.1 Factores semánticos en la resolución de problemas.
 - 2.2 Los operadores semánticos.
 - 2.3 Factores de comprensión de los enunciados.
 - 2.4 Variables didácticas de los enunciados.
3. Tipos de problemas y estrategias de resolución.
4. El fracaso en la resolución de problemas.

BIBLIOGRAFÍA

1. EL TRATAMIENTO Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

RESUMEN: El tratamiento didáctico clásico de la resolución de problemas ha tomado poco en consideración las dificultades que tienen su origen en la lectura y comprensión de los enunciados. Investigaciones recientes han puesto de manifiesto la necesidad de hacer un trabajo, previo a la resolución, consistente en trabajar la representación de la situación evocada por el problema. Así mismo, los factores de carácter semántico, los conocimientos pragmáticos de los alumnos y cuestiones ligadas a la traducción-modelización juegan un papel importante de cara al éxito en la resolución. En este artículo se analizan estas y otras cuestiones y se ofrecen pautas didácticas para el trabajo en la Educación Primaria.

PALABRAS CLAVE: Resolución de problemas. Factores de comprensión de los enunciados de problemas. Representación de un problema. Variables didácticas de los enunciados de un problema. Operadores semánticos en la resolución de problemas.

Es muy frecuente encontrar, tanto en los textos de Matemáticas como en los escritos de Didáctica de las Matemáticas, que la actividad matemática por excelencia consiste en la resolución de problemas, y que en el aprendizaje de las Matemáticas se debe enfrentar al alumno a la verdadera actividad matemática: la resolución de problemas.

El Diseño Curricular Base de Educación Primaria incluye un bloque temático específico de resolución de problemas, al que da la consideración de transversal. Y es que la capacidad para plantearse y resolver problemas está en la base de todo conocimiento científico, es a menudo un reto para el individuo y constituye la actividad mental por excelencia del ser humano: descubrir.

La noción de problema ha sufrido un cambio profundo de significación. Su evolución viene caracterizada por cuatro fenómenos:

- la introducción de una gran variedad de problemas con numerosos contextos,
- la puesta en evidencia del papel primordial de la resolución de problemas, que es algo más que encontrar la solución,
- la aparición de problemas como introductores a situaciones que van a hacer aparecer ciertos conceptos,
- la consideración del proceso de solución como modelo de la actividad matemática.

No entraremos aquí en las diferentes definiciones que se han dado de la noción de problema, aunque sí nos parece interesante la distinción clásica entre ejercicio y problema.

Algunos autores como Arsac¹ añaden a los dos tipos anteriores, aplicación, y descubrimiento o búsqueda, los problemas de modelización destinados a aprender a matematizar una situación concreta, y los tests o deberes que casi siempre suelen pertenecer a la clase de los ejercicios de aplicación. En su opinión, ninguna de las categorías anteriores permite a los alumnos, verdaderamente, experimentar un auténtico proceso científico en el que hay que hacer pruebas, conjeturar, verificar y probar; por

¹ ARSAC, G. et al. *Problème ouvert et situation-problème*. IREM de Lyon. Lyon, 1988.

ello, propone trabajar con *problemas abiertos*, un tipo de problema que tiene las siguientes características:

- Enunciado corto.
- El enunciado no induce ni el método ni la solución. En ningún caso la solución debe reducirse a la utilización o aplicación inmediata de resultados.
- El problema se encuentra dentro de un marco conceptual familiar para los alumnos, de manera que pueda apropiarse con facilidad la situación e implicarse en pruebas, proyectos de resolución y contraejemplos.

Más adelante, precisaremos el significado que vamos a darle al término problema abierto, que desde luego, dista bastante del de Arsac, invariable en la Educación Infantil o Primaria.

Lo que sí parece estar fuera de toda duda, es que resolver un problema va más allá de hacer una operación y encontrar su resultado, es algo más que ejecutar un algoritmo, tiene que ver más, con hacer preguntas relacionadas con la matematización de un problema real, o bien con la construcción de nuevos objetos matemáticos, y responder a esas preguntas. Lo anterior indica ya que vamos a encontrarnos con dos tipos de problemas: los que surgen del interior de la propia disciplina y los que provienen del mundo exterior, de la vida real.

Trabajar con este segundo tipo de problemas plantea cuestiones fundamentales sobre las relaciones entre matemáticas y realidad, y sobre la posibilidad de un funcionamiento autónomo de las matemáticas. Estos problemas van a ser prioritarios en los niveles que nos ocupan, lo que no implica en modo alguno, que no puedan abordarse situaciones-problema, en forma de juego, que carezcan de anclaje en la realidad.

De lo anterior puede deducirse que el papel que se asigne a la actividad de resolución de problemas va a ser determinante, y va a marcar una elección didáctica importante, según que la función asignada a esta actividad sea: la tradicional, en la que el problema aparece únicamente como criterio para determinar el saber del alumno y vinculada, por tanto, a la evaluación; la ligada a los métodos llamados activos, en donde el problema es utilizado como móvil del aprendizaje; o la que nosotros compartimos, en la que la resolución de problemas es, a la vez, fuente y criterio del saber matemático en juego. El interés por la resolución de problemas se debe, también, a la posibilidad que estos ofrecen para construir conocimientos matemáticos y modelizar situaciones, lo que ayuda a comprender y dominar el entorno que nos rodea.

Los niveles a los que nos dirigimos, Primaria y E.S.O., requieren prestar una gran atención a los aspectos psicológicos y semánticos que confluyen en la resolución de problemas, que cobran aquí tanta importancia, o más, que los aspectos matemáticos, por lo que estudios clásicos sobre resolución de problemas en matemáticas, necesitan ser completados con otros que nos permitan comprender las causas del fracaso de los alumnos ante problemas escolares muy simples.

Para algunos psicólogos, como Hoc, un problema no califica una tarea sino una situación, es decir, la confrontación de un sistema cognitivo a una tarea. Desde este punto de vista, *un problema es la representación de un sistema cognitivo construido a partir de una tarea, sin disponer inmediatamente de un procedimiento admisible para alcanzar el objetivo*².

La construcción de la **representación** de la tarea es lo que se llama **comprensión**, en tanto que la construcción del **procedimiento** se llama **estrategia de resolución**.

Se sabe que las estrategias o procedimientos de resolución que un individuo va a poner en marcha para resolver un problema, van a depender directamente de la representación que ese individuo se ha hecho de la situación. De la misma manera, el cambio de representación va a ser el resultado de los conocimientos que el individuo va a movilizar durante el proceso de búsqueda de la solución, de las acciones que va a llevar a cabo, es decir, de los sucesivos razonamientos.

Gréco³ ha probado que hay, al menos, dos sistemas de representaciones que funcionan en el ejercicio del pensamiento natural, o espontáneo, y que intervienen en la resolución de problemas. Un sistema **R** de representaciones que construyen el sentido, tanto el directo, llamado legible, como el figurado. Y un sistema **T**, bastante complejo, de tratamiento de las representaciones, y en el que existen varias categorías de esquemas: los esquemas de orientación o representación calculable (esto es una ecuación, es un problema de proporcionalidad, etc.), los que efectúan las operaciones locales, y los que ligan los anteriores generando programas, procedimientos, algoritmos o correcciones, son los llamados esquemas de concatenación.

La comprensión es un proceso dinámico de cambio de la representación, gracias al cual el alumno pasa de una representación inadecuada,

² HOC, J. M. *Psychologie cognitive de la planification*. P.U.F. Paris, 1987.

³ GRÉCO, P. "Structures et Significations". Prefacio de la obra BIDEAU, J. *Logique et bricolage chez l'enfant*. P.U.L. Lille, 1988.

en la que atribuye a la tarea propiedades que no tiene, a una representación adecuada, y de una representación incompleta a otra completa.

1.1. Algunos modelos de resolución de problemas

Existen muchos modelos de resolución de problemas, que van desde los clásicos propuestos por Schoenfeld⁴ y Polya⁵, en el lado más matemático, más próximo a la heurística, a otros modelos más psicológicos del tipo I.D.E.A.L. de Bransford y Stein, y las propuestas de Gestión Mental de Antoine de la Garanderie⁶, pasando por modelos intermedios como el de Mason, Burton y Stacey.

El análisis que hemos hecho de los modelos precedentes, ha tenido siempre como telón de fondo las edades a las que nos dirigimos, las características de su pensamiento y sus capacidades cognitivas, así como los objetivos de tipo matemático que se persiguen en la Educación Infantil, Educación Primaria y E.S.O. Nos ha interesado, también, buscar soluciones al constatado fracaso escolar en la resolución de problemas en la Educación Primaria, por eso, hemos prestado atención a factores que se tienen poco en cuenta en la resolución clásica que se hace en matemáticas.

Hemos descartado los modelos propuestos por Polya y Schoenfeld por considerarlos poco adecuados para el tratamiento de problemas muy elementales, si bien consideramos que los profesores deben conocer su existencia y efectuar lecturas complementarias de sus textos. Estos y otros modelos tienen, de alguna manera, el defecto de considerar la actividad de resolución de problemas como algo lineal en la que unas fases suceden a otras; las investigaciones nos dicen, sin embargo, que varios procesos intervienen simultáneamente, interactuando entre ellos a efectos de mejorar nuestra comprensión y encaminarnos a la resolución, y que, además, el método de resolución tiene que tener en cuenta la especificidad de cada problema, por lo que es difícil diseñar un método único de actuación.

El modelo de La Garanderie⁷ tiene interés, no tanto por su clasificación de individuos en auditivos o visuales, sino por las técnicas próximas a la metacognición que usa, y que podrían facilitar muy bien la represen-

⁴ SCHOENFELD, A. H. *Mathematical Problem Solving*. Academic Press. Orlando, 1985.

⁵ POLYA, G. *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas. México, 1982.

⁶ TAURISSON, A. *La réussite en mathématiques*. Agence d'ARC inc. Québec, 1990.

⁷ LA GARANDERIE, A. de, *Les profils pédagogiques*. Éditions du Centurio. 1980. (*La gestión mental. Los perfiles pedagógicos: descubrir las aptitudes escolares*. 1983).

tación del problema por parte del niño, y con ello la posibilidad de extraer significaciones al discurso del problema y las acciones que en él se dan. Las investigaciones⁸ han demostrado que pedir a los sujetos que están resolviendo un problema, que expliquen y verbalicen sus acciones, o que traten de representarse el problema mediante imágenes mentales, produce una mejora notable en el éxito que tienen estos sujetos, y ello por el papel de modelo que juegan las imágenes en la resolución de problemas.

Así, por ejemplo, se sabe que para los individuos visuales:

- la representación visual del problema precede a su resolución;
- la representación es el punto de partida de la búsqueda de la solución;
- la representación es, a menudo, conjuntista y describe los estados.

Para los auditivos:

- la representación esquemática materializa una reflexión que se está haciendo en ese momento;
- la representación acompaña la resolución y se termina con la solución;
- la representación trata de los operadores de transición de un estado a otro.

La utilidad del material para la resolución de un problema es también distinta para unos y para otros. Dentro de este método, juegan un papel importante las entrevistas individuales con los alumnos, que les ayudan a ejercitar los gestos mentales y las evocaciones, a la vez que permiten al profesor conocer los procesos mentales de los alumnos.

La noción de problema es aquí muy general, y está, en algunos casos, muy alejada de lo que en matemáticas se entiende por problema. Para nosotros, el interés de este método reside en las pautas que proporciona para el desarrollo de destrezas y estrategias generales que intervienen en la resolución de problemas, y que puede ser de utilidad potencial en los primeros niveles. En particular, el desarrollo del pensamiento lateral o divergente, la mejor explotación de la memoria y el fomento del pensamiento creativo, son para nosotros los elementos fuertes de este método.

El proceso desarrollado por Mason y otros⁹, aunque en una línea similar a la del método IDEAL, tiene un carácter algo más matemático y se

⁸ Ver DENIS, M. *Image et cognition*. P.U.F. Paris, 1989.

⁹ MASON, J., BURTON, L., STACEY, K. *Pensar matemáticamente*. Labor-MEC. Barcelona, 1988. Pág., 93.

aplica a la resolución de problemas aritméticos, lógicos o geométricos. El método IDEAL¹⁰ pretende ayudar a identificar las diferentes partes que deben tenerse en cuenta en la resolución de un problema. Las siglas IDEAL significan:

- I: Identificación del problema
- D: Definición y representación del problema.
- E: Exploración de posibles estrategias.
- A: Actuación, fundada en una estrategia.
- L: Logros. Observación y evaluación de los efectos de nuestras actividades.

La idea del monitor o tutor interior que desarrolla este método, tiene como objetivo fomentar la introspección del alumno y su capacidad para interrogarse, y guarda ciertas similitudes con la necesidad de provocar evocaciones y gestos mentales que se usan en la gestión mental.

2. LA LECTURA Y COMPRENSIÓN DE ENUNCIADOS

El enunciado de un problema es un escrito matemático particular que tiene características propias, podríamos, incluso, decir que es un género literario bien caracterizado que necesita para su comprensión, la adquisición de ciertas claves y alguna dosis de entrenamiento.

Comprender un enunciado supone tener la capacidad para representarse, no sólo la situación descrita en el enunciado, sino también la tarea asociada a la situación que debe resolverse, lo que supone conocer, de alguna manera, las intenciones del autor del enunciado, que no siempre están implícitas en el texto. Además, en el caso de los problemas matemáticos hay un contrato implícito según el cual, el contexto semántico no debe aclarar completamente el objeto del problema y la tarea a resolver, pues se considera que su descubrimiento por parte del lector forma parte de su trabajo como resolutor, por lo que las dificultades de comunicación entre el autor del texto y su intérprete se acrecientan, lo que lleva aparejada una mayor dificultad para representarse el problema.

Se dice frecuentemente que las matemáticas son un lenguaje, lenguaje que es aprendido por el niño, en simultáneo en el caso de los primeros aprendizajes lógico-matemáticos, y generalmente con posteriori-

¹⁰ BRANSFORD, J. y STEIN, B. *Solución IDEAL de problemas*. Labor. Barcelona, 1986.

dad a la lengua materna; y en ambos casos, no puede negarse que existen muchas interacciones entre estos dos lenguajes.

Muchas de las dificultades que se han encontrado en la resolución de problemas aritméticos simples, nada tienen que ver con la mala comprensión o ejecución de los algoritmos, son de otra naturaleza. Conciernen a la lectura y comprensión del enunciado, a la selección y organización de las informaciones pertinentes dadas en el enunciado, y a la traducción de esta organización en términos matemáticos. La mayor dificultad es la interpretación del contexto semántico, necesaria para interpretar y seleccionar las informaciones dadas por el enunciado, y se encuentra tanto en los alumnos de 6 años como en los de 16, y ello con la misma intensidad, lo que debería llevar a plantearnos una adecuación de los procedimientos didácticos utilizados en la enseñanza de resolución de problemas, así como a interrogarnos sobre las operaciones y procesos mentales que usan los alumnos, es decir sobre el funcionamiento cognitivo de los alumnos en situación de resolver problemas.

Así por ejemplo, pensar que los datos suministrados por el enunciado del problema son directamente tratables por el alumno es una ilusión didáctica de falsa transparencia que dista mucho de ser real; para ser utilizables, deben descodificarse e integrarse en la representación del problema.

2.1. Factores semánticos en la resolución de problemas

Un enunciado aritmético podría ser caracterizado, en tanto que texto, de la manera siguiente:

- Es un enunciado que describe un estado o suceso, más o menos corriente, o que tiene que ver con el universo imaginario familiar del niño. A la descripción le siguen una o varias preguntas a las que el alumno debe responder.
- La situación que se describe en el enunciado está contemplada de una manera particular, resalta los aspectos cuantitativos dando ciertos datos numéricos.
- La elaboración de las respuestas implica inferencias que ponen en marcha competencias de tipo lógico-matemático.
- La respuesta, la solución del problema, debe ser presentada de una manera particular, utilizando el lenguaje matemático.

Lo anterior hace que las dificultades de lectura del enunciado de un problema sean significativamente diferentes de las que se dan en la

comprensión de un texto corriente, si bien, en ambos casos, pueden explicarse a partir del funcionamiento semántico de los niños, para lo que resulta imprescindible acudir a la noción de *representación semántica*, lo que a su vez va a enviarnos a la construcción de las estructuras mentales que la sustentan. Además, en el caso de los problemas, como ya hemos dicho, los enunciados no tienen como misión clarificar el problema, pues se supone que es lo que debe hacer el resolutor con ayuda de los datos que se dan.

Por otra parte, el comportamiento de un niño, de las edades a las que nos venimos refiriendo, frente a la resolución de problemas, no puede reducirse a la dimensión cognitiva, pues las componentes afectivas y de motivación juegan también un papel fundamental y no pueden ignorarse. La autoestima, el nivel de confianza en sí mismo y una actitud positiva hacia la resolución de problemas, son objetivos prioritarios a alcanzar si se desea mejorar la actual enseñanza de resolución de problemas y que el alumno tenga éxito en ella.

2.1.1. Los problemas de traducción-modelización

Para Ehrlich¹¹, en la resolución de un problema aritmético simple, el alumno debe realizar una traducción que comporta dos aspectos:

- Un *aspecto formal*. Se trata de pasar de un lenguaje corriente a un lenguaje formalizado, matemático, que dé como resultado la transformación del enunciado de partida en una fórmula numérica.
- Un *aspecto semántico, conceptual y temático*. Es necesario pasar de un estado, un suceso o un objeto, del que habla el enunciado, a una estructura numérica (aditiva o sustractiva en el caso que nos ocupa).

Y en un problema de traducción hay tres tipos de dificultades:

- las relativas al conocimiento y comprensión del mensaje de partida: el enunciado del problema;
- las que tienen que ver con el conocimiento y la comprensión del mensaje de llegada: la operación a hacer; y finalmente,
- las dificultades ligadas al propio proceso de traducción, es decir, al paso del enunciado a la operación a hacer.

¹¹ EHRlich, S. *Sémantique et mathématiques*. Nathan. Paris, 1990.

Ahora bien, la noción de traducción está ligada a la de modelización matemática, en tanto que las matemáticas son un lenguaje que sirve para expresar, *de otra manera*, los datos del problema, a efectos de poder tratar el problema de una manera más general y abstracta, por lo que esa traducción al lenguaje matemático no es ni fácil ni instantánea.

Hasta ahora, las matemáticas habían presentado la noción de traducción como un medio para acceder directamente al objeto del problema, a la estructura del problema (resolver un problema es, en este contexto, pasar de las palabras del texto, de la historia narrada, a su expresión mediante símbolos u operaciones), lo que está en discordancia con las investigaciones más recientes relativas a la manera en que se produce la representación de un problema¹². Sabemos que esta traducción sólo puede llevarse a cabo en un nivel de operacionalización que supone la existencia previa de una representación ya estructurada del problema por parte del alumno. En otras palabras: esta traducción sólo es posible cuando el alumno controla ya el problema en cuestión y puede hacer uso de un proceso de modelización. Por tanto, una de las cuestiones de las que nos ocuparemos más adelante, tiene que ver con la adquisición y operacionalización de una representación del problema por parte del alumno.

2.2. Los operadores semánticos

En la comprensión del enunciado de partida hay que considerar distintos factores: aquello de lo que se habla, que pone de manifiesto problemas temáticos y conceptuales, y la manera en que se dice, que supone la emergencia de problemas de verbalización, fundamentalmente lexicales y gramaticales.

La distancia lingüística entre el alumno y el lenguaje especializado de las matemáticas, es un hecho reconocido por todos. Por ello, la tarea de comprensión del texto de un problema, se ve facilitado cuando se coloca al alumno en dominios conceptuales que le son familiares (no es igual ganar canicas que dividendos en la bolsa), y cuando los términos que se utilizan en el enunciado son, también, familiares desde un punto de vista léxico y sintáctico.

Recogiendo todo lo anterior, podríamos decir que el alumno necesita hacer toda una serie de modificaciones sobre lo real antes de poder disponer de una estructura matemática de acogida. Debe seleccionar las informaciones pertinentes en el enunciado, modificar su organización, es-

¹² JULO, J. *Répresentation des problèmes et réussite en mathématiques*. P.U.R. Rennes, 1995.

pecificar su categoría de pertenencia a lo real, determinar las categorías matemáticas correspondientes, etc. Además, estos "arreglos" dependen del tema del enunciado, y este tema varía de un problema a otro, por lo que es difícil para el alumno sistematizar los cambios a realizar y ordenar las categorías precisas.

Un papel especial, en relación con los procesos anteriores, corresponde a los llamados **operadores semánticos** del enunciado. "*Los operadores semánticos son unidades semánticas que reúnen, en una sola palabra, un concepto y una expresión verbal, y que ejercen una función específica en el enunciado, marcando, según el caso, un proceso de acumulación o comparación (...) Un operador semántico viene definido por su función en el enunciado del problema, y no por sus propiedades informativas intrínsecas*"¹³.

Son operadores semánticos de acumulación aquellos que dan lugar a aumentos o disminuciones; suelen constituir, aunque no siempre, parejas de polos y significaciones opuestas, por ejemplo: vender/comprar, ganar/perder, encontrar/perder, llenar/vaciar, reunir/separar, regalar, romper, tirar, etc. Los operadores semánticos de comparación inducen, justamente, una comparación entre estados: veces más, veces menos, más que y menos que.

Estos operadores, insertados en el enunciado del problema, inducen los cuatro tipos posibles de comparación: aditiva, sustractiva, multiplicativa y divisiva. Y es precisamente aquí, donde reside una de las dificultades de interpretación del enunciado; los operadores semánticos de acumulación son a menudo ambiguos, debido precisamente a la doble significación polar que tienen, por lo que sólo el contexto y la comprensión de la narración y las acciones del texto, permiten determinar cuál de las dos significaciones posibles se corresponde con el enunciado, lo que es vital para asociar a la situación el operador matemático correspondiente que resuelve el problema. Cuando el operador semántico tiene el mismo signo que el operador matemático que resuelve el problema (por ejemplo: ganar canicas en una partida $\Rightarrow$ sumar), este tiene menor dificultad que cuando el operador semántico es de signo contrario (por ejemplo, regalé canicas $\Rightarrow$ restar).

Se necesitan, por tanto, otros índices e indicaciones complementarias para resolver un problema, no basta con los operadores semánticos; además, ciertas acciones carecen de significación directa en relación con

¹³ EHRLICH, S. Op. cit. Pág. 31.

los operadores matemáticos; ¿qué sugieren, por ejemplo, andar, cortar, leer, pegar, etc.? ¿Cuáles son sus contrarios? Hay, por tanto, operadores semánticos nulos que no inducen ningún operador matemático. Igualmente, hay enunciados que carecen de operador semántico, por lo que los alumnos deben usar otros índices que les permitan hacer inferencias, asociando acciones a las perífrasis verbales, usando, por ejemplo, la inclusión jerárquica de clases, interpretando las conjunciones que aparecen en el texto, o expresiones como "en total".

Se sabe, Ehrlich lo ha estudiado y probado experimentalmente, que según sean las características semánticas de un enunciado, una misma operación puede ser bien resuelta por todos los alumnos, por la mitad de ellos o por muy pocos. Igualmente, el efecto producido por cada factor (tipo de operador, signo del operador), tomado aisladamente, es limitado, pero ciertas combinaciones pueden dar lugar a fracasos masivos. Ciertos operadores son percibidos de manera muy confusa por los niños, y deberían ser reemplazados por otras expresiones.

Las expresiones *cada* y *cada uno* que suelen aparecer en los problemas multiplicativos, son mal dominadas por los alumnos y llevan a errores frecuentes; lo mismo ocurre con las expresiones "*n veces menos que y*". Por el contrario, parece que el hecho de que la pregunta del problema se encuentre al principio o al final del enunciado es indiferente a nivel de los resultados de resolución, en contra de lo que se había venido afirmando. Sin embargo, en lo que se refiere al suceso o acción que presenta el enunciado, los alumnos tienen menos dificultad cuando las acciones del relato se encuentran ordenadas temporalmente.

Si al final del Primer Ciclo de Educación Primaria, los alumnos dominan, sin gran dificultad, los algoritmos de adición y sustracción, en tanto que continúan durante mucho tiempo después teniendo dificultades en la resolución de problemas aritméticos sencillos, habría que pensar, seriamente, en hacer una didáctica de los problemas que tuviera en cuenta aspectos menos matemáticos, como los semánticos o los psicológicos, que a continuación abordaremos y de los que venimos hablando. En particular, debería existir todo un entrenamiento en la traducción semántico-matemática.

2.3. Factores de comprensión de los enunciados

En la comprensión de un enunciado, los alumnos ponen en juego diferentes tipos de representaciones cognitivas entre las que establecen correspondencias: de tipo lingüístico, icónico, y ligadas al escrito matemático y su correspondencia oral.

Como ya hemos dicho, la comprensión de un enunciado depende de muchos factores¹⁴, algunos de los cuales acabamos de analizar, y a los que vamos a añadir los que siguen:

– Los conocimientos pragmáticos de los alumnos

Muchos enunciados se encuentran ligados a las prácticas corrientes de resolución de problemas en la clase, provienen en su mayoría de manuales escolares que siguen una tradición, tanto en cuanto a temas como a redacción. La familiaridad del alumno con tales enunciados, lo que sabe que tiene que hacer habitualmente, el papel que cumplen los datos numéricos, etc., influye en su comprensión del enunciado. Recuérdese el contrato didáctico clásico de la resolución de problemas que actúa en la muy conocida "edad del capitán"¹⁵.

– Los conocimientos del mundo

Cuando se desconoce el funcionamiento de la bolsa, es prácticamente imposible resolver un problema que trate sobre ella, por mucho que sólo comporte una sencilla sustracción; faltan conocimientos sobre ese mundo. Inversamente, la resolución de ciertos problemas requiere el distanciamiento de los conocimientos que tenemos sobre situaciones familiares demasiado concretas.

– Las competencias lingüísticas

Tienen que ver con cuatro niveles de análisis: nivel pragmático (interpretar lo que ha querido decir el autor del enunciado), nivel de la representación semántica, —de la que ya hemos hablado—, nivel morfosintáctico (estructura de las frases, tiempos verbales, etc.), nivel gráfico (disposición del enunciado, presencia de esquemas, tablas, figuras, dibujos, etc.).

– Las capacidades perceptivas

Están relacionadas, sobre todo, con la exploración visual y la discriminación perceptiva.

¹⁴ Ver DESCAGES, A. *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes*. Hachette. Paris, 1992.

¹⁵ El IREM de Grenoble realizó en 1980 una experiencia entre alumnos de 7 y 8 años, a los que propuso, entre otros, el siguiente problema: En un barco hay 26 corderos y 10 cabras. ¿Cuál es la edad del capitán? De los 97 alumnos preguntados, 76 dieron una respuesta obtenida a partir de los datos numéricos del problema, lo que puso de manifiesto un contrato didáctico específico que funciona en la resolución de problemas aritméticos escolares. Ver, para más detalles, CHAMORRO, M. C. *El aprendizaje significativo en el área de las matemáticas*. Alhambra-Longman. Madrid, 1992.

– *La capacidad de representarse el problema*, fundamentalmente a través de un escrito matemático, y poner en marcha procedimientos de verificación y control que permitan completar o modificar las significaciones extraídas del texto.

– *Las competencias lógicas*

La comprensión de los sistemas de reglas condiciona la estrategia de resolución. Las interferencias entre pensamiento natural y lógica formal son constantes. Se sabe, y Wermus¹⁶ lo ha puesto de manifiesto en sus trabajos, que la lógica espontánea de los niños y la lógica de predicados no funcionan de la misma forma, y que las operaciones de conjunción y disyunción de atributos son sustituidas por amalgamas de predicados que funcionan de manera distinta.

2.4. Variables didácticas de los enunciados

Siguiendo a Teule-Sensacq y Vinrich¹⁷, vamos a distinguir distintas variables didácticas que confluyen en el enunciado de un problema, y que van por tanto a determinar, tanto distintas estrategias de resolución, como un diferente tratamiento didáctico. Las variables didácticas van a permitir organizar, según parámetros fijos, diferentes tipos de actividad.

– *El soporte*

Hay cuatro tipos de soporte clásicos: una tabla, un gráfico, una imagen y un enunciado narrado a través de un texto escrito.

Uno de los objetivos de la resolución de problemas es, justamente, que el alumno sepa pasar de un tipo de representación a otro, y que sepa utilizar las diferentes organizaciones del problema.

– *El contexto*

Si se toman como referencia las prácticas sociales de los niños, estos pueden enfrentarse a: *contextos efectivos*, donde la situación descrita permite una acción o una representación concreta; *contextos descritos* por el maestro, es decir, evocaciones de prácticas sociales de referencia para

¹⁶ WERMUS, H. "Essai de représentation de certaines activités cognitives à l'aide des prédicats avec composantes contextuelles". En *Archives de Psychologie*, vol XLIV, n.º 171. Genève, 1976. Págs. 205-221.

¹⁷ TEULE-SENSACQ, P. y VINRICH, G. *Lire et comprendre des énoncés de problèmes*. LADIST. Bordeaux, 1992.

el alumno; o *simulación* de prácticas sociales que no pertenecen al entorno familiar del alumno.

Pueden distinguirse, también, las situaciones que conducen al alumno al reconocimiento de la coherencia de un enunciado; en ellas, el alumno debe encontrar datos, organizarlos, etc. Estas situaciones presentan enunciados mezclados, o bien situaciones que tienen como objetivo que el alumno produzca, a partir de un gráfico o una imagen, un enunciado coherente.

– *Las informaciones*

Además del soporte, cabe considerar si las informaciones suministradas son textuales, lógicas o numéricas.

En este nivel se sitúan las actividades que deben llevar a los alumnos a preguntarse sobre la pertinencia de las informaciones en relación con la solución del problema propuesto.

– *Las preguntas*

Constituyen el desafío de la actividad. Según la naturaleza del procedimiento de respuesta, pueden considerarse varios tipos de preguntas: la respuesta se obtiene por simple lectura del enunciado o por verificación de una información presente, explícitamente, en el texto; la respuesta se obtiene reflexionando, sin calcular; la respuesta se obtiene calculando; la respuesta es imposible por falta de informaciones en el enunciado.

– *El programa de cálculo*

El alumno puede encontrarse frente a tres tipos de situaciones: aquellas en las que es necesario realizar un cálculo para la búsqueda del resultado; aquellas en las que hay que elaborar un programa de cálculo o construcción (caso de más de una operación aritmética o de una construcción geométrica), lo que supone una verdadera anticipación de la obtención de la solución; y finalmente, aquellas en las que el alumno debe manifestarse sobre las solución, ya elaborada, encontrada por otro.

– *La respuesta*

La recontextualización del resultado de un problema numérico, o la identificación de la unidad en la que debe expresarse la solución, en el caso de los problemas que usan medidas, constituye uno de los desafíos más importantes de la resolución de problemas.

– La comunicación de resultados

Puede ser escrita u oral. Destinada a otro alumno, a un grupo de alumnos, al profesor, etc.

– La prueba de la validez del resultado

Puede diferenciarse entre situaciones en las que la prueba se apoya sobre algo material (por ejemplo, una medida que puede ser verificada), o sobre una acción (probar que dos figuras tienen la misma cantidad de superficie), o aquellas que requieren de una prueba formal.

El análisis, para cada enunciado concreto, de las variables didácticas citadas, es un excelente ejercicio que permite al maestro analizar los conocimientos que el niño pone en marcha en la resolución de ese problema, así como ajustar el nivel de dificultad a las características de los alumnos, haciendo una resolución graduada de problemas. A este análisis deben unírsele otros, relativos tanto a los aspectos semánticos como a otros de cariz más matemáticos, tales como el tipo de problema y sentencia.

Al estudio anterior de las variables didácticas que intervienen en el enunciado de un problema, habría que añadirle un modelo de análisis detallado de los aspectos lingüísticos que intervienen en el texto, propuesto por Turco¹⁸:

Pragmática:

- Elección de los pronombres de conjugación.
- Elección de artículos (ligados a las limitaciones de la sintaxis).
- Elección de adverbios.

Representación semántica:

Dominio del léxico.
Aceptabilidad semántica de los enunciados.
Conocimiento del mundo localmente respetado.

Morfosintaxis

Dominio de la ortografía, de la conjugación, de la sintaxis de la frase.

¹⁸ TURCO, G. *Repères*. INRP. Paris, 1986.

Gráfico

- Legibilidad del enunciado
- Puntuación de la frase
- Mayúsculas.

Este modelo serviría, tanto para analizar la dificultad lingüística de un enunciado, como de pauta para elaborar enunciados apropiados para las edades correspondientes, bien directamente, o transformando un enunciado ya existente a efectos de mejorar su comprensión.

D'Amore relata los resultados de una experiencia llevada a cabo en Bologna, en la que a partir de un texto clásico de un problema, permitiendo a los niños discutir entre ellos y hacer todo tipo de preguntas a los investigadores sobre el texto, este iba siendo retocado con las observaciones hechas por los niños. Este nuevo texto era propuesto en otra clase paralela, que disponía de las mismas condiciones de trabajo que la clase anterior. Pues bien, los resultados obtenidos no ofrecen lugar a duda: *"Si el texto había sido confeccionado en la forma 'adulta' clásica, gran parte de la atención y de la discusión la acaparaba el texto, Si el texto había sido confeccionado del modo descrito más arriba, no había casi discusión sobre el texto y la atención se centraba casi toda en la resolución, signo de que el texto, tal como estaba, no creaba problemas."*¹⁹

3. TIPOS DE PROBLEMAS Y ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

A partir del texto clásico de Carpenter y Moser²⁰, que abrió toda una línea de investigación sobre clasificación de problemas, se han sucedido distintos estudios de este tipo. Entre los más conocidos están los de Nesher y Vergnaud, y más recientemente en España, los de Castro y Rico²¹, y Puig.

La primera gran clasificación considera dos grandes clases: los problemas de adición y sustracción, llamados problemas aditivos, y los problemas de multiplicación y división, llamados problemas multiplicativos. Sólo consideraremos los primeros, dado que disponemos de espacio limitado.

¹⁹ D'AMORE, B. *Problemas*. Síntesis. Madrid, 1997. Pág. 103.

²⁰ CARPENTER, T.P., MOSER, y ROMBERGA, T.A. (Eds.) *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*. Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale, 1982.

²¹ CASTRO, E., RICO, L. y GIL, F. *"Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos"*. En *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 10, n.º 3. Págs. 243-253.

El grado de dificultad de un problema en función de la forma que adopta la sentencia ha sido estudiado por Rosenthal y Resnick, dando lugar a una ordenación de sentencias que va desde la canónica más fácil de la suma ($a+b=?$) a una sentencia no canónica de sustracción ($?-b=c$), pasando por las cuatro restantes. En relación con este aspecto, un estudio de Castro, Rico, Batanero y Castro²², señala que la posición de la incógnita dentro de la sentencia juega un papel fundamental a la hora de valorar la dificultad de un enunciado.

La clasificación clásica de categorías semánticas de Carpenter y Moser, para problemas en los que interviene una operación estática o dinámica, basada en los esquemas mentales que utiliza el resolutor cuando los resuelve, clasifica los problemas en combinación y cambio respectivamente. Dentro de los problemas de combinación, pueden considerarse los de comparación e igualación. Finalmente se obtienen los seis tipos clásicos: cambio/unión, cambio/separación, combinación, comparación, igualación/añadir e igualación/quitar.

Personalmente, nos parece más clara la clasificación de Vergnaud²³, que partiendo de la noción de medida y transformación, considera las relaciones aditivas como relaciones ternarias que pueden combinarse dando distintas estructuras aditivas. Encuentra seis esquemas ternarios fundamentales:

- composición de dos medidas para dar una medida (combinación, medida-medida-medida);
- transformación operando sobre una medida para dar una medida (transformación, estado inicial-transformación-estado final);
- relación estática que liga dos medidas (comparación, medida-relación estática-relación);
- composición de dos transformaciones que da una transformación (transformación-transformación-transformación);
- transformación que opera sobre un estado relativo (relación) para dar un estado relativo (relación estática-transformación-relación estática);

²² Citado por CASTRO, E., RICO, L. y GIL, F. "Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos". En *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 10, n.º 5. 1991. Págs. 243-251.

²³ VERGNAUD, G. *El niño, las matemáticas y la realidad*. Ed. Trillas. México, 1997. Puede consultarse también VERGNAUD, G. "Problemas aditivos y multiplicativos". En CHAMORRO, M.ª del C. (Ed.) *Dificultades de aprendizaje de las Matemáticas*. Secretaría General Técnica. Subdirección General de información y Publicaciones. MECD. Madrid, 2001.

- composición de dos estados relativos (relaciones) para dar otro estado relativo (relación estática-relación estática-relación estática).

Las investigaciones anteriores permiten al profesor graduar la actividad de resolución de problemas y adaptarla a las características y nivel de los alumnos, a la vez que le proporcionan elementos de reflexión para evaluar los procedimientos usados por los alumnos y los errores y dificultades previsibles, permitiendo un análisis *a priori* de calidad. Pero con todo, no es suficiente, falta un aspecto importante sobre el que vamos a interrogarnos a continuación: ¿existe una didáctica de los problemas que proporcione un plan de acción?

Hemos encontrado algunas respuestas a esa pregunta en los trabajos de Descaves²⁴, y algunas de sus recomendaciones son las que recogemos a continuación.

Para facilitar el aprendizaje, deben utilizarse sistemas materiales de representación que permitan el paso de la representación del problema a la de la solución. Estos sistemas de representación, que pueden considerarse como instrumentos psicológicos, en el sentido de Vygotski, comportan:

- representaciones icónicas (esquemas),
- representaciones simbólicas ligadas a ciertas disposiciones espaciales,
- escritos específicamente matemáticos,
- la lengua natural.

También en los trabajos sucesivos del equipo ERMEL²⁵ del INRP se encuentran recomendaciones sobre el tipo de problemas a presentar a los alumnos, pronunciándose por una variedad de enunciados y tareas del siguiente estilo:

- Dada una situación, vivida o verbalizada, determinar los diferentes tipos de preguntas que pueden hacerse.
- Dada una pregunta, buscar datos e informaciones pertinentes que permitan responderla.
- Analizar en situaciones o enunciados dados, la pertinencia, verosimilitud, coherencia, redundancia, etc., de los datos dados.

²⁴ DESCAGES, A. *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes*. Hachette. Paris, 1992.

²⁵ ERMEL. "Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire". Cycle élémentaire, Tome 1. OEDL. Paris, 1978; ERMEL. *Apprentissages numériques*. CE1. Hatier. Paris, 1993.

- Resolver problemas cuyo enunciado viene dado a través de un gráfico, tabla, dibujo, foto, etc.
- Dada una situación, un pregunta y un resultado obtenido como respuesta, interpretarlo, validarlo y comunicarlo.

Proponer tanto problemas complejos, cuya resolución comporte varias etapas que se resuelvan con un modelo conocido por el alumno, no precisadas en las preguntas intermedias, como problemas abiertos para los que el alumno no tiene aún un modelo de resolución. Estos problemas servirán para desarrollar estrategias de búsqueda.

4. EL FRACASO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Los últimos estudios sobre alumnos que fracasan en la resolución de problemas ponen de manifiesto que estos alumnos tienen dificultades para interpretar los diferentes elementos que componen el contexto de un problema, así como para seleccionar las informaciones pertinentes que intervienen en la resolución. Se sabe, además, que la causa del fracaso tiene que ver con ciertos disfuncionamientos en la actividad de representación, tales como, por ejemplo, la falta de control en la selección de las informaciones pertinentes, o la influencia excesiva del contexto, que originan que, por ejemplo, los alumnos no utilicen conocimientos operatorios que ya poseen.

Por ello, interpretaciones anteriores, que achacaban el origen del fracaso de los alumnos a causas generales como una capacidad intelectual inferior o diferente, deben desestimarse, y así, en la actualidad, las investigaciones van dirigidas a entender la gran distancia que existe a veces, entre lo que el alumno es potencialmente capaz de hacer y lo que hace realmente frente a una situación dada, lo que lleva aparejado una nueva manera de proceder frente a los alumnos en situación de fracaso.

Así, algunas dificultades tienen su origen en las representaciones, y lo que hace que algunos alumnos fracasen no es su capacidad de razonamiento, idéntica a la de aquellos que resuelven satisfactoriamente los problemas, sino la naturaleza de la representación del problema que se hacen, que es, para estos alumnos, más rígida, menos estructurada y más frágil. Esto explica, por ejemplo, el comportamiento de los alumnos que cambian de procedimiento y punto de vista varias veces a lo largo de la resolución de un problema, y ello sin justificación alguna, abandonando procedimientos correctos o cálculos que les hubieran llevado a la solución, por lo que su **actividad de representación es muy inestable**.²⁶

²⁶ JULIO, J. *Répresentation des problèmes et réussite en mathématiques*. P.U.R. Rennes, 1995.

Otro defecto detectado es la **falta de coherencia en cuanto a las informaciones a tomar en cuenta**: el alumno deja de lado informaciones importantes, a la vez que se centra en detalles o elementos superficiales, lo que da como resultado una representación incompleta de la situación.

Hay también una aparente falta de control para cuestionarse puntos de vista, por lo que se aprecia una cierta **insensibilidad a las contradicciones e incoherencias**, y así por ejemplo, las retroacciones producidas por el trabajo en grupo que ponen de manifiesto estas contradicciones, parecen no jugar en estos individuos el papel habitual de los conflictos cognitivos, que siguen sin cuestionarse su interpretación errónea de la tarea.

Estos disfuncionamientos tendrían como resultado una falta de estructuración, que daría lugar a una representación del problema regida por unos pocos esquemas deficientemente elaborados, y por tanto muy rígida y vulnerable, ya que estos esquemas poco elaborados aumentan las probabilidades de fracaso, lo que da lugar a un efecto *bola de nieve* que aumenta con una práctica desafortunada de la resolución de problemas.

Por tanto, la cuestión a plantear es: ¿qué tipos de ayudas didácticas, que impidan los disfuncionamientos de la representación, puede ofrecer el profesor al alumno?

• La multipresentación

La multipresentación tiene como objeto enriquecer el contexto dado en el enunciado del problema, proporcionando para ello al alumno, varios enunciados que responden a la misma estructura. Se trata de versiones distintas de un mismo problema que se proporcionan bien para ser resueltos a la vez, o para que el alumno escoja el que quiere resolver, y en el que, por ejemplo, se cambian longitudes de cuerdas, por edades de personas o por números naturales, conservando siempre las mismas relaciones numéricas e idéntico procedimiento de solución. En la presentación simple se daría únicamente uno de los tres problemas para resolver

Las experiencias realizadas en este sentido por Julio han permitido comprobar cómo el nivel de éxito pasa, para ciertos problemas, del 44% al 68% de éxito en favor de la multipresentación, y lo que es más interesante, que en el caso de los alumnos que fracasan en la resolución de problemas, este porcentaje pasa del 21% al 40%.

El hecho de poner en marcha una ayuda como ésta, que afecta sólo al disfuncionamiento de la representación del problema, pues no hay cam-

bios que impliquen un cambio en los conocimientos necesarios para resolver uno u otro enunciado, produce una mejora indiscutible tanto en la población escolar en general como en los alumnos que fracasan. Cuando el alumno escoge el problema, tiene la oportunidad de seleccionar aquel que tiene un contexto semántico y pragmático que le resulta más claro o más familiar, y su efecto en la resolución es inmediato. Los factores afectivos, culturales y relacionales intervienen en la resolución de problemas con la misma intensidad que los factores intelectuales y cognitivos.

• Actuar sobre los distintos entornos del problema

- *entorno inmediato del problema*: mejorar o dar consignas para la resolución, material que se da a la vez que el problema (esquemas, dibujos, etc.), crear un buen ambiente de trabajo de la clase, procedimiento de trabajo, etc. También en general, todo lo que tiene que ver con la presentación del problema: características lingüísticas, operadores semánticos, contexto semántico, factores que hemos analizado anteriormente.
- *segundo entorno*: ayudas que permitan tomar en cuenta todos los elementos disponibles para resolver el problema y que no se encuentran presentes en el entorno inmediato: fichas de ayuda, soportes informáticos, trabajo preliminar para recordar ciertas cosas, hacer referencia a problemas anteriores análogos, discutir el enunciado, redactarlo de nuevo, etc. Su misión es preparar la representación.
- *tercer entorno*: ayudas que sólo actúan cuando se necesitan, cuando hay un bloqueo por ejemplo, cuando se constata que el alumno va a confundirse o está perdido, etc.

Se trata, en cualquier caso, de ayudar al alumno a construir una mejor representación del problema, no de ayudarlo guiándole a través de los procedimientos de resolución como habitualmente se hace.

• Comentar la tarea

Tiene por objeto facilitar la comprensión de la consigna dada en el enunciado, tratando de hacerla más explícita, para evitar así los problemas generados por el contrato didáctico del estilo de los de "la edad del capitán", y orientar a la vez al alumno sobre el tipo de actividad que puede llevar a cabo. Comentarios añadidos al enunciado, como: haz un esquema, diseña un programa de construcción geométrica, usa una tabla, etc., son a veces decisivos y marcan la línea de división entre la correcta resolución del problema y el fracaso.

• Añadir tareas al enunciado

Se trata de añadir al texto del enunciado tareas cuya resolución va a permitir una mejor comprensión del mismo y un mejor tratamiento de los datos e informaciones contenidos en él. Las tareas pueden ir desde la simple lectura en voz alta del enunciado, a una nueva redacción del mismo, pasando por la dramatización de la situación que relata el enunciado (cuando ello es posible), la eliminación de informaciones inútiles contenidas en el enunciado, etc. Todo ello a condición de no hacer del problema algo aún más complejo y pesado. Su misión es ayudar al alumno a construir una representación correcta del problema.

BIBLIOGRAFÍA

- ARSAC, G. et al. *Problème ouvert et situation-problème*. IREM de Lyon. Lyon, 1988.
- BRANSFORD, J. y STEIN, B. *Solución IDEAL de problemas*. Labor. Barcelona, 1986.
- CARPENTER, T. P., MOSER, y ROMBERGA, T. A. (Eds.) *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*. Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale, 1982.
- CASTRO, E, RICO, L. y GIL, F. "Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos". En *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 10, n.º 3. 1991. Págs. 243-253.
- CHAMORRO, M. C. *El aprendizaje significativo en el área de las matemáticas*. Alhambra-Longman. Madrid, 1992.
- CHAMORRO, M. C. (Coord.) *Didáctica de las Matemáticas*. Pearson educación. Madrid, 2003.
- D'AMORE, B. *Problemas*. Síntesis. Madrid, 1997.
- DENIS, M. *Image et cognition*. P.U.F. Paris, 1989.
- DESCAVES, A. *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes*. Hachette. Paris, 1992.
- EHRLICH, S. *Sémantique et mathématiques*. Nathan. Paris, 1990.
- ERMEL. "Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire". *Cycle élémentaire*, Tome 1. OCDL. Paris, 1978.
- ERMEL. *Apprentissages numériques*. CE1. Hatier. Paris, 1993.
- GRÉCO, P. "Structures et Significations". Prefacio de la obra BIDEAU, J. *Logique et bricolage chez l'enfant*. P.U.L. Lille, 1988.
- HOC, J. M. *Psychologie cognitive de la planification*. P.U.F. Paris, 1987.
- JULO, J. *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*. P.U.R. Rennes, 1995.
- LA GARANDERIE, A. de. *La gestión mental. Los perfiles pedagógicos: descubrir las aptitudes escolares*. 1983.
- MASON, J., BURTON, L., STACEY, K. *Pensar matemáticamente*. Labor-MEC. Barcelona, 1988.
- POLYA, G. *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas. México, 1982.

SCHOENFELD, A. H. *Mathematical Problem Solving*. Academic Press. Orlando, 1985.

TAURISSON, A. *La réussite en mathématiques*. Agence d'ARC inc. Québec, 1990.

TEULE-SENSACQ, P. y VINRICH, G. *Lire et comprendre des énoncés de problèmes*. LADIST. Bordeaux, 1992.

TURCO, G. *Repères*. INRP. Paris, 1986.

VERGNAUD, G. *El niño, las matemáticas y la realidad*. Ed. Trillas. México, 1997.

VERGNAUD, G. "Problemas aditivos y multiplicativos". En CHAMORRO, M. C. (Ed.), *Dificultades de aprendizaje de las Matemáticas*. Secretaría General Técnica. Subdirección General de Información y Publicaciones. MECD. Madrid, 2001.

WERMUS, H. "Essai de représentation de certaines activités cognitives à l'aide des prédicats avec composantes contextuelles". En *Archives de Psychologie*, vol XLIV, n.º 171. Genève, 1976.

MATERIALES COMPLEMENTARIOS (Para realizar talleres)

TRATAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

M.^a del Carmen Chamorro Plaza
Catedrática de Escuela Universitaria
de Didáctica de las Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

Francisco Vecino Rubio
Profesor Titular de Didáctica de las Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

INTRODUCCIÓN

1. Modelos de resolución de problemas a tener en cuenta.
2. Lectura y comprensión de enunciados.
3. Variables didácticas de los enunciados.
4. Tipos de problemas y estrategias de resolución.

Problemas del taller.

BIBLIOGRAFÍA

INTRODUCCIÓN

De acuerdo con lo manifestado, tanto en los textos de Matemáticas como en los escritos de Didáctica de las Matemáticas, sobre la importancia formativa de la actividad de resolución de problemas, presentamos esta propuesta para taller recordando de entrada las principales teorías en las que vamos a basarnos para proponer los problemas que se trabajarán en ese espacio.

El Diseño Curricular Base de Educación Primaria incluye un bloque temático específico de resolución de problemas, y le da la consideración de transversal.

En todos los problemas se perseguirá un doble objetivo: la **representación** del mismo (**comprensión**) y la construcción del **procedimiento** de resolución (**estrategia de resolución**).

1. MODELOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS A TENER EN CUENTA

Existen muchos modelos de resolución de problemas, que van desde los clásicos propuestos por Schoenfeld¹ y Polya², en el lado más matemático, más próximo a la heurística, a otros modelos más psicológicos del tipo I.D.E.A.L. de Bransford y Stein, y las propuestas de Gestión mental de Antoine de la Garanderie³, pasando por modelos intermedios como el de Mason, Buton y Stacey.

La propuesta de Cerdán y Puig⁴ nos parece adecuada, como método de trabajo, para los primeros niveles:

1. Lectura del problema.
2. Descomposición del texto del problema.
3. Diferenciación de conceptos.
4. Substanciación.
5. Atención a la pregunta del problema.
6. Análisis de errores.
7. Desarrollo del lenguaje.
8. Soluciones alternativas.

Del modelo de La Garanderie podemos aprovechar algunas características de la representación del problema, ya que:

- la representación visual del problema precede a su resolución;
- la representación es el punto de partida de la búsqueda de la solución;
- la representación es a menudo conjuntista y describe los estados.
- la representación esquemática materializa una reflexión que se está haciendo en ese momento;
- la representación acompaña la resolución y se termina con la solución;
- la representación trata de los operadores de transición de un estado a otro.

¹ SCHOENFELD, A. H. *Mathematical Problem Solving*. Academic Press. Orlando, 1985.

² POLYA, G. *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas. México, 1982.

³ TAURISSON, A. *La réussite en mathématiques*. Agence d'ARC inc. Québec, 1990.

⁴ CERDÁN, F. y PUIG, L. *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis. Madrid, 1988. Págs. 207-209.

Preferimos el proceso descrito por Mason y otros⁵ al del método IDEAL, ya que tiene un carácter algo más matemático y se aplica a la resolución de problemas aritméticos, lógicos o geométricos.

2. LECTURA Y COMPRENSIÓN DE ENUNCIADOS

Muchas de las dificultades que se han encontrado en la resolución de problemas aritméticos simples, conciernen a la lectura y comprensión del enunciado, a la selección y organización de las informaciones pertinentes dadas en el enunciado, y a la traducción de esta organización en términos matemáticos. De acuerdo con ello, tendremos que tener en cuenta:

1. Los factores semánticos en la resolución de problemas, distinguiendo entre el *aspecto formal* y el *aspecto semántico, conceptual y temático* (Erlich) y subrayando la importancia decisiva de los operadores semánticos.
2. Los factores de comprensión de los enunciados, considerando entre estos: los conocimientos pragmáticos de los alumnos, los conocimientos del mundo, las competencias lingüísticas, las capacidades perceptivas, la capacidad de representarse el problema y las competencias lógicas utilizadas en la comprensión de los sistemas de reglas.

3. VARIABLES DIDÁCTICAS DE LOS ENUNCIADOS

Parece interesante seguir la exposición de Teule-Sensacq y Vinrich⁶, sobre las distintas variables didácticas que se pueden gestionar en el trabajo con problemas. Entre ellas citamos por su particular importancia:

- El soporte
- El contexto
- Las informaciones
- Las preguntas
- El programa de cálculo
- La respuesta
- La comunicación de resultados
- La prueba de la validez del resultado

⁵ MASON, J., BURTON, L., STACEY, K. *Pensar matemáticamente*. Labor-MEC. Barcelona, 1988. Pág. 93.

⁶ TEULE-SENSACQ, P. y VINRICH, G. *Lire et comprendre des énoncés de problèmes*. LADIST. Bordeaux, 1992.

4. TIPOS DE PROBLEMAS Y ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

La línea de investigación abierta por Carpenter y Moser⁷, desarrollada por Nesher y Vergnaud, y más recientemente en España, por Castro y Rico⁸, proporciona un marco amplio en el que basarse para emprender cualquier taller de problemas que nos propongamos. Pero, además, tal taller resultaría falto de interés aplicativo si no se mostrasen una serie de aspectos a trabajar en esos diversos tipos de problemas. Con este propósito, hemos adoptado las propuestas del equipo ERMEL⁹ del INRP que se concretan en una variedad de enunciados y tareas del siguiente estilo:

- Dada una situación, vivida o verbalizada, determinar los diferentes tipos de preguntas que pueden hacerse.
- Dada una pregunta, buscar datos e informaciones pertinentes que permitan responderla.
- Analizar en situaciones o enunciados dados, la pertinencia, verosimilitud, coherencia, redundancia, etc., de los datos dados.
- Resolver problemas cuyo enunciado viene dado a través de un gráfico, tabla, dibujo, foto, etc.
- Dada una situación, una pregunta y un resultado obtenido como respuesta, interpretarlo, validarlo y comunicarlo.

Tales recomendaciones didácticas nos sirven para proponer un trabajo específico para maestros de Educación Primaria sobre algunos problemas elegidos a propósito para desarrollar diversos aspectos a los que nos hemos referido en la exposición anterior. Conforme a las respuestas obtenidas en cada una de las tareas encomendadas, ellos, una vez practicados los cambios o incorporaciones de tipo didáctico que sugiere la resolución de tareas, deberán realizar el mismo trabajo con sus alumnos en las clases específicas de resolución y tratamiento de problemas.

⁷ CARPENTER, T. P., MOSER, y ROMBERGA, T. A. (Eds.) *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*. Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale, 1982.

⁸ CASTRO, E, RICO, L. y GIL, F. "Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos". En *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 10, n.º 3. Págs. 243-253.

⁹ ERMEL. "Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire". *Cycle élémentaire*, Tome 1. OCDL. Paris, 1978. ERMEL, *Apprentissages numériques*. CE1. Hatier. Paris, 1993.

PROBLEMAS DEL TALLER

Las fotos

En una excursión, Pedro ha utilizado 3 carretes de 24 fotos cada uno. 4 fotos salieron movidas. Utilizó después, 2 nuevos carretes de 12 fotos cada uno; esta vez no le salieron dos fotos.

Normalmente pega las fotos en un álbum de 10 páginas; en cada página no puede pegar más de 6 fotos. ¿Podrá pegar todas sus fotos en el álbum?

Tarea: Reelaborarlo

¿En qué aspectos debe incidir esa reelaboración?

- Eliminación de datos no pertinentes.
- Hacer explícitos los posibles datos implícitos.
- Posible reestructuración de datos numéricos, para dar menos datos sin cambiar sustancialmente el problema o su resultado.
- Generación de operadores semánticos, aparte de los ya dados.
- ¿Reelaboración de la pregunta?

CAMBIO DE CROMOS

En un kiosco hay el siguiente anuncio:

Kiosco JUANI (Cambio de cromos)

- 1 "tazo" por 5 futbolistas
- 2 futbolistas por 3 coches
- 4 coches por 5 "pokemon"

Rafa llega al kiosco para cambiar 120 pokemon, que tiene repetidos, por tazos.

¿Cuántos tazos conseguirá?

Tarea: Resolución manipulativa, gráfica y simbólica.

Reflexiones a realizar por el maestro para seguir ese itinerario de resolución:

- a) Establecimiento de condiciones para hacer posible la resolución manipulativa.
- b) Intervención sobre la variable *tipo de material* para posibilitar una resolución de tipo gráfico.
- c) Tipo de consigna para pasar a la resolución simbólica.

EL FARMACÉUTICO

Dr. Juan López Hurtado

REUMATÓLOGO

Consulta diaria de 5 a 7

25 de abril de 2001

Sra. Luisa González Mariño

- 1) Gelocatil cápsulas: 2 comprimidos diarios durante 7 días
- 2) Inacid de 125 mg en supositorios: 1 al acostarse durante 7 días
- 3) Prednisona 20 mg: 1 pastilla en el desayuno, 1 comida y 1 cena, durante 15 días

Tarea: Multipresentación en contextos y/o presentaciones distintas.

El maestro ha de gestionar las variables didácticas oportunas para que se dé:

- a) Cambio de contexto.
- b) Cambio de presentación formal (icónica, gráfica, simbólica).

El farmacéutico le ha dado:

1 caja de Gelocatil

GELOCATIL
10 COMPRIMIDOS

1 caja de Inacid

INACID supositorios
20 unidades

3 cajas de Prednisona

PREDNISONA Alonga
20 mg 12 comprimidos

¿Le ha dado el farmacéutico suficientes cajas?

LA RECETA

¿Cuál es la solución correcta?

Ingredientes de la receta de plátanos al horno para 4 personas:

- 32 g de mantequilla
- 8 plátanos maduros
- 16 g de azúcar

¿Cuántos gr. de mantequilla, y cuántos plátanos se necesitarán si utilizásemos 12 gr. de azúcar. ¿Para cuántas personas sería la receta?

Solución 1:

$$16 - 12 = 4$$

$$32 - 4 = 28 \text{ g de mantequilla}$$

$$8 - 4 = 4 \text{ plátanos}$$

$$2 \text{ personas}$$

Solución 2:

$$12 / 16 = 3/4$$

$$32 \times 3/4 = 24 \text{ g de mantequilla}$$

$$8 \times 3/4 = 6 \text{ plátanos}$$

$$4 \times 3/4 = 3 \text{ personas}$$

Solución 3:

$$12 + 4 = 16$$

$$32 + 4 = 36 \text{ g de mantequilla}$$

$$8 + 4 = 12 \text{ plátanos}$$

$$4 + 4 = 8 \text{ personas}$$

Tarea: Seleccionar y razonar la solución correcta.

El trabajo del maestro se debe centrar en los condicionamientos para que se dé un:

- a) Control de los datos que aparecen en cada solución.
- b) Control de cada uno de los procedimientos de resolución que aparecen en las soluciones.
- c) La institucionalización del procedimiento de resolución.

LOS ELEFANTES

Inventar un problema con la solución siguiente:

$$2 \times (18 - 7) : 2 \text{ elefantes.}$$

Tarea: Construcción del enunciado de un problema cuya solución indicada sea la dada.

La construcción del enunciado debería cumplir los siguientes pasos:

- 1) Búsqueda de un contexto que dé sentido a la solución propuesta.
- 2) ¿Es necesario seguir el orden en que aparecen las operaciones para construir el enunciado?
- 3) Construcción del enunciado, con control paralelo de las operaciones que implica y de las operaciones dadas.
- 4) Completado el enunciado, resolución del problema construido y comparación con la solución dada.

LA PASTERERÍA INDUSTRIAL

Una pastelería industrial fabrica 8000 *donuts* cada día. Tiene que pedir la harina y los huevos que necesita para hacerlos durante un mes.

Para hacer un donut hacen falta 150 gr de harina y 2 huevos.

La harina la traen en un camión que transporta 80 sacos. Cada saco pesa 80 kilos. Los huevos los traen camionetas que tienen 12 estantes. En cada estante caben 1000 huevos.

¿Cuántos camiones de harina y cuántas camionetas de huevos hay que pedir para un mes?

Dí qué se necesita para fabricar un donut.

¿Cuántos donuts fabrica al día esa pastelería?

¿Cuántos huevos se transportan en cada viaje?

¿Cuántos kilos de harina trae cada camión?

Tarea: Elaboración de una lista de tareas previas que ayuden al planteamiento y la resolución.

El maestro debe reflexionar sobre los siguientes aspectos que ayudarán al alumno a resolver un problema aparentemente complejo:

- a) Ayudas para la lectura del enunciado.
- b) Ayudas de tipo gráfico.
- c) Cálculo previo de preparación para los cálculos que exige la resolución.
- d) Propuesta de elementos de registro de datos (tablas organizadoras)

BIBLIOGRAFÍA

CARPENTER, T. P., MOSER, y ROMBERGA, T. A. (Eds.) *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*. Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale, 1982.

CASTRO, E, RICO, L. y GIL, F. "Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos". En *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 10, n.º 3. Págs. 243-253.

CERDÁN, F. y PUIG, L. *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis. Madrid, 1988. Págs. 207-209.

ERMEL. "Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire". *Cycle élémentaire*, Tome 1. OCDL. Paris, 1978.

ERMEL. *Apprentissages numériques*. CEI. Hatier. Paris, 1993.

MASON, J., BURTON, L., STACEY, K. *Pensar matemáticamente*. Labor-MEC. Barcelona, 1988. Pág. 93.

POLYA, G. *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas. México, 1982.

SCHOENFELD, A. H. *Mathematical Problem Solving*. Academic Press. Orlando, 1985.

TAURISSON, A. *La réussite en mathématiques*. Agence d'ARC inc. Québec, 1990.

TEULE-SENSACQ, P. y VINRICH, G. *Lire et comprendre des énoncés de problèmes*. LADIST. Bordeaux, 1992.