

**DIDÁCTICA PARA LA
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

EDUCACIÓN PRIMARIA

2007

José Miguel de la Rosa Sánchez

INDICE

1.- INTRODUCCIÓN.....	3
1.1.- El por qué de una didáctica para la resolución de problemas.....	3
1.2.- La resolución de problemas y la escuela.....	4
1.3.- Distinción entre ejercicio y problema, Contenido y/o procedimiento.....	5
2.- ACTITUDES FRENTE A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.....	5
2.1.- Actitudes de los alumnos frente a los problemas matemáticos, variables que influyen...	6
2.2.- Los docentes ante el planteamiento y resolución de problemas matemáticos.....	9
3.- LENGUAJE Y PROBLEMAS.....	11
4.- CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS MATEMÁTICOS.....	13
4.1.- Por la forma de aparecer los datos y la pregunta.....	13
4.2.- Por su estructura semántica.....	14
4.2.1.- Problemas de suma y resta con una operación.....	14
4.2.2.- Problemas de multiplicar y dividir.....	19
5.- ERRORES Y DIFICULTADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.....	27
5.1.- Factores que influyen en los errores de los alumnos.....	27
5.2.- Dificultades en la resolución de problemas matemáticos.....	28
6.- PASOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.....	34
6.1.- Enunciado y Resolución.....	34
6.1.1.- Redacción del enunciado del problema.....	34
6.1.2.- Resolución de problemas.....	36
6.2.- Pasos para la resolución de problemas.....	38
1 ^{er} Paso: entender el problema.....	38
2 ^o Paso: realizar una representación gráfica del problema.....	39
3 ^{er} Paso: trazar un plan de actuación.....	40
4 ^{er} Paso: realizar la operación que hemos deducido.....	41
5 ^{er} Paso: comprobar la respuesta.....	42
7.- TIPOS Y SECUENCIACIÓN DE PROBLEMAS EN PRIMARIA.....	43
7.1.- Realización de variedad de problemas.....	43
7.2.- Cómo plantear la creación de problemas propios.....	44
8.- RECURSOS DIDÁCTICOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.....	46
8.1.- Consideraciones a tener en cuenta.....	46
8.2.- Posibles Recursos Didácticos.....	48
8.2.1.- Los cuentos como herramientas en la resolución de problemas.....	48
8.2.2.- Las TIC como herramientas en la resolución de problemas.....	49
8.2.3.- El vídeo.....	51
8.2.4.- La calculadora.....	52
9.- ANÁLISIS DE LOS LIBROS DE TEXTO Y MATERIALES COMPLEMENTARIOS...	56
9.1.- Análisis de datos relativos a problemas de una operación.....	56
9.2.- Análisis de datos relativos a problemas de dos operaciones.....	59
9.3.- Análisis de datos relativos a problemas de tres o más operaciones.....	60
9.4.- Análisis de datos atendiendo al número de operaciones.....	60
9.5.- Conclusiones Finales.....	61
10.- LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL CURRÍCULUM Y P.A.C.....	62

DIDÁCTICA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

“Todos los problemas tienen solución. Si un problema no tiene solución será otra cosa, pero no un problema”.

1.- INTRODUCCIÓN:

1.1.-- El por qué de una didáctica para la resolución de problemas

Este trabajo surgió para dar respuesta a los resultados de la primera Evaluación de Diagnóstico de Educación Primaria y Secundaria realizada en la Comunidad Autónoma de Andalucía en el curso 2006- 2007, centrada en la adquisición de competencias básicas por parte del alumnado, en la que nos confirma lo que a diario, nos encontramos en nuestras aulas: la resolución de problemas es una asignatura pendiente para nuestros/as alumnos/as.

Básicamente se trata de una propuesta metodológica de apoyo para la resolución de problemas en Primaria con un especial interés en el Primer Ciclo, pero que a su vez es fácilmente extrapolable a otros niveles educativos, ya que la mayor parte de las actividades propuestas admiten ampliaciones y/o modificaciones con mayor o menor grado de complejidad, para ser utilizadas según las características de los alumnos a los que van dirigidas.

Además, este trabajo, tiene un análisis teórico, del cual emana la propuesta de metodología que hacemos, sobre los distintos aspectos que intervienen en la resolución de problemas, tales como: las actitudes de los docentes y alumnos ante ellos, las diferencias entre el lenguaje tradicional y el matemático, los errores más comunes en el planteamiento y resolución de problemas, la sistematización en su abordaje,... todo ello desde un lenguaje cercano a la tarea diaria de los que nos dedicamos al trabajo de enseñar.

Muchas razones confirman la necesidad de la enseñanza de la resolución de problemas. Entre éstas destacamos:

- La resolución de problemas implica poner un mayor énfasis en el desarrollo del aprendizaje que en su memorización.
- La resolución de problemas es un medio de aprendizaje y refuerzo de contenidos.
- Solucionar problemas ayuda a que los estudiantes desarrollen hábitos de organización, trabajo y autoevaluación.
- Contribuye al desarrollo de la capacidad para solucionar otros problemas y aplicar dicho aprendizaje para resolver situaciones de la vida cotidiana.
- Fomenta la participación de los alumnos/as en su propio aprendizaje.
- Ayuda a confiar en sus posibilidades y a desarrollar hábitos de colaboración.

- El propósito de ciertos problemas es estimular el conocimiento y el descubrimiento personal.
- Permite crear una forma de trabajo satisfactorio, atrayente y divertido, así como el establecimiento de actitudes de participación, gusto por el trabajo, por la precisión, etc.
- Porque la resolución de problemas es aplicable a todas las edades.
- Permite también integrar conceptos, procedimientos y actitudes en una misma secuencia de aprendizaje, ya que, a través de procedimientos, es decir de “hacer” alguna cosa, ya sea contar, clasificar, representar, etc., se llega a sacar conclusiones y a generalizar, y con ello a los conceptos;

1.2.- La resolución de problemas y la escuela

Posiblemente los que nos dedicamos a la enseñanza, en algún momento nos hemos preguntado, qué tendrán de especial las matemáticas para que nos encontremos divididos entre los que les gusta, y disfrutan con ellas, y los que no. El rechazo en nuestra sociedad a cualquier cosa relacionada con las matemáticas es muy grande y parece existir la creencia de que está vedada solo para unos privilegiados y superdotados, de tal manera que siempre que surge alguna cuestión matemática, tendremos los que intentan esquivarla con frases como *"yo no, que soy de letras"* o *"eso para ti, que se te dan bien las matemáticas"*.

Pero por otra parte, ¿qué pasa en la escuela?. Por un lado los alumnos/as la tratan como una signatura a la que hay que dar respuesta mediante operaciones más o menos complicadas y que no tienen o no le encuentran conexión con su vida ordinaria, y por otra los docentes se afanan en hacerlas más llevaderas, sin lograrlo.

La sociedad y nuestros representantes políticos creen que esta situación parece que nos está pidiendo a gritos un aumento de los contenidos, de las horas de clase, de apoyo extra lectivo, de las actividades,... Pero detengámonos un poco y reflexionemos.

Nuestro país lleva, en materia educativa, desde décadas a la cola de los más avanzados. Se han cambiado, modificado, incrementado los planes de estudio, el Curriculum... no hemos acabado de implantar una nueva ley de educación cuando la siguiente está llamándonos a las puertas, y sin embargo la situación no revierte. Quizás sea el momento de plantearnos no la cantidad si no la calidad de los contenidos que enseñamos y de la metodología con la que enseñamos.

No vamos a entrar aquí a analizar los múltiples factores que pueden influir en estos resultados (el estudio en casa, la familia, el entorno socio-económico y cultural, las expectativas propias, el nivel de estudios de padres y madres,...) si no que nos lo vamos a plantear desde nuestro punto de vista como docentes, como respuesta a la desconexión que parece existir entre la metodología que realizamos en clase y los resultados que obtenemos. Para ello no vamos a inventar nada nuevo, si no proponer una metodología participativa

con alumnado, una metodología en el aprendizaje en la resolución de problemas y una serie de actividades que les enseñen a pensar, no simplemente a contestar.

1.3.- Distinción entre ejercicio y problema, Contenido y/o procedimiento:

Al resolver ejercicios aplicamos un procedimiento rutinario para llegar a una respuesta. A su vez, el hacer ejercicios ayuda a aprender conceptos, propiedades y procedimientos, los cuales podrá aplicar cuando vaya a resolver problemas.

Un problema supone al alumno/a una situación que no podrá resolver aplicando directamente los conocimientos que tenga inmediatamente disponibles, para resolverlo tendrá que leerlo, reflexionar e interiorizarlo, tratar de remitirlo a experiencias personales, manipularlo, representarlo gráficamente y/o dramatizada, al objeto de llegar a las operaciones matemáticas que le lleven a su solución.

Sobre si tratar la resolución de problemas como una parte integral de cualquier aprendizaje matemático (procedimiento), o ser considerado como una parte del currículo con entidad propia (Contenido). Debemos ver la resolución de problemas como una herramienta que articula el proceso de estudio de los distintos bloques de contenido matemático, pero a su vez, en nuestra propuesta, en un primer momento la vamos a considerar como un contenido más del currículo en cuanto al aprendizaje de la metodología que debemos emplear cuando no enfrentamos a un problema, el cual una vez adquirido nos resultará imprescindible para la adquisición de nuevos aprendizajes matemáticos.

2.- ACTITUDES FRENTE A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Las actitudes que se adoptan frente a la resolución de problemas, las vamos centrar en los directamente implicados, alumnos y docentes. Este análisis viene condicionado por las realidades que constatamos en nuestras aulas, en las que nuestros alumnos/as presentan actitudes ante la resolución de problemas del tipo:

- Ir directamente a conseguir la solución sin establecer previamente un plan de trabajo; no organizan la información recibida, o lo hacen con precipitación.
- No realizan una lectura comprensiva del enunciado.
- Resuelven rápidamente a modo de ensayo/error, sin lectura previa, tomando los datos numéricos (claramente diferenciados de las palabras en el enunciado) de acuerdo con los conocimientos que más se dominan, no necesariamente con los más relevantes para su solución.
- Suelen dispersar su atención, debido normalmente a la dificultad que tienen de abstraerse de otros estímulos y concentrarse en la tarea propuesta.
- Les falta de razonamiento ante los datos aportados, posiblemente por la carencia de madurez del alumno/a.

- El miedo que sienten ante situaciones novedosas o que no dominan les lleva a un bloqueo que les impide incluso escuchar las sugerencias y explicaciones del maestro.
- La mayoría de los alumnos piden la ayuda del maestro para la resolución antes de haber terminado de leer el problema.
- Los problemas que se les presentan no le sugieren nada, por lo que no suelen estar motivados y no sienten necesidad de resolverlos. Hay que tener claro que la realidad e interés de los alumnos es distinta a la de los adultos.
- Existencia de una separación entre la realidad en la que vive el alumno/a y la traducción al lenguaje matemático. Desde este punto de vista, los problemas aparecen primero para la construcción de los objetos matemáticos y después para su aplicación a diferentes contextos.

2.1.- Actitudes de los alumnos frente a los problemas matemáticos, variables que influyen.

Para los alumnos/as, las matemáticas son una materia difícil que provoca sentimientos de intranquilidad, miedo, ansiedad, inseguridad, desconcierto e incertidumbre y manifiestan con frecuencia sus sentimientos acerca de ella, a través de expresiones como “odio las matemáticas” o “me divierto con las matemáticas”, etc. Otras veces, el blanco de sus sentimientos es el maestro que las imparte: “el maestro me tiene manía”, “No me entero como explica”,...

En este rechazo influyen:

- La naturaleza precisa, exacta y sin ambigüedades de las matemáticas.
- Su carácter abstracto e impersonal.
- La actitud de los profesores hacia los alumnos/as y hacia la asignatura.
- La metodología de enseñanza.
- La imagen estereotipada de su entorno que le hace tomar una determinada postura ante el aprendizaje matemático. Es habitual que los padres, amigos o compañeros comenten sus experiencias amargas y sus sentimientos de fracaso en matemáticas, con lo que en lugar de motivar al estudiante, lo angustian y, lo predisponen.

En la formación y mantenimiento que los alumnos/as adoptan frente a los problemas, juegan un importante papel las razones del contexto social y del aula en las creencias, emociones y actitudes.

Las creencias relativas a la resolución de problemas hacen referencia al conocimiento subjetivo que tiene el alumno sobre la naturaleza de las Matemáticas y pueden influir tanto en la motivación con la que los alumnos se enfrentan a las Matemáticas, como en el rendimiento matemático e incluso en la elección de las estrategias de resolución que aplicarán.

Las actitudes hacia la resolución de problemas hacen referencia a los sentimientos positivos o negativos que despierta en el alumnado dicha resolución. Cuando los sentimientos son de tipo negativo las actitudes que adoptan suelen ser:

- Comportamiento de “adhesión”: escogemos la alternativa sin riesgo, o por lo menos con riesgo conocido, que otras cuyas consecuencias desconocemos. “Más vale lo malo conocido que lo bueno por conocer”.
- Comportamiento de “evitación defensiva”: tomamos una actitud defensiva si es imposible encontrar una alternativa sin peligros (conocidos o desconocidos. En este caso la información puede seguir una de las siguientes alternativas:
 - Posponer: Se huye del problema que nos obliga a tomar decisión que no sabemos dónde nos llevarán.
 - “Pasar el muerto”: Buscar a otro que nos resuelva la situación (compañeros, padres, hermanos...). Con la excusa de que les ayudemos, buscan un “vicio” en el ayudante..., que nos hagan el trabajo.
 - “Mini-Maxi”: Si no podemos “pasar el muerto” y no tenemos más remedio que hacer el trabajo, buscamos entre los conocimientos que tenemos (Maximiza nuestras posibilidades) una posible respuesta (minimiza las consecuencias de no hacer nada).
 - Hipervigilancia (parálisis por análisis): El alumno se ve presionado y busca todo tipo de información, no distinguiendo entre la que es objetiva y la que es subjetiva, relevante o irrelevante, favorable o desfavorable, etc.
- Cuando son conscientes del riesgo y no se sienten presionados por el tiempo se encuentran motivados, buscan información objetiva favorable y desfavorable, , analizan .

Las emociones en el caso de las Matemática se refieren a las reacciones que tienen cuando se enfrentan ante una tarea matemática como puede ser la resolución de problemas. Así hay alumnos que se bloquean ante un problema, a veces, se sienten frustrados y buscan tentativamente la respuesta que les sacará del bloqueo, sin importarles si esa respuesta es lógica o no.

Es frecuente experimentar sentimientos a lo largo del proceso de resolución de un problema. Estos sentimientos y emociones pueden hacer de motor que impulse para buscar una solución o, por el contrario, bloquear dicho proceso debido al peso de las emociones negativas.

Durante la familiarización con la situación problemática se suele experimentar una tensión en la búsqueda de un plan de resolución, que en algunos casos puede desembocar en interés y en otros, en ansiedad. De esta manera, cuando se produce la inspiración se tie-

nen sentimientos positivos que cobran más o menos intensidad. Sin embargo, en el momento de la verificación de la solución se puede sentir placer o frustración, según que una demostración confirme o no la validez del plan previsto.

Cuando una persona está ansiosa, interpreta los sucesos como amenazantes y peligrosos, creándose un circuito de retroalimentación negativa entre sus pensamientos y la actividad psicofisiológica. Como resultado, aparecen valoraciones catastrofistas y pensamientos derrotistas: "me voy a quedar bloqueado"; "perderé los papeles"; "es muy difícil"; "haré el ridículo"; "es un rollo". En el Cuadro I se recogen las manifestaciones en las respuestas de ansiedad ante las matemáticas:

CUADRO I. Manifestaciones en los tres sistemas de respuesta de la ansiedad matemática		
Respuestas cognitivas (pensamos)	Respuestas fisiológicas y emocionales (sentimos)	Conductas (hacemos)
"Es muy difícil." "No voy a entenderlo." "Es un rollo. Mejor dejarlo." "El profesor me reñirá." "Esto es una comedura de coco." "Esto es sólo para listos."	Sentimientos de impotencia, fracaso e inutilidad. Miedo, preocupación y/o irritabilidad. Nudo en la garganta. Tensión muscular, sudoración, rubor.	Repetir una y otra vez el inicio de la tarea. Evitación y escape. Abandonos. Tocarse, rascarse, etc.

Fuente: Guerrero, Blanco y Vicente, 2002, p.230.

Frente a este tipo de reacciones individuales, se manifiesta como, una terapia muy auxiliadora el trabajo en equipo. A través de él se desencadenan en el alumno:

- Sentimientos de seguridad y confianza en sí mismo debido al intercambio y discusiones entre iguales.
- Confianza en sus propias capacidades para resolver problemas.
- No se rinden fácilmente cuando el problema es difícil, disminuyendo la ansiedad.
- Pérdida de miedo y gusto en resolver problemas de matemáticas.
- Se incrementan los valores de respeto y valoración de las opiniones de los compañeros.
- Aumenta los que piensan que las matemáticas son útiles.

Además de los beneficios a nivel de los sentimientos que despiertan, también, el trabajo en grupo supone:

- La verbalización, que influye de manera muy determinante en la clarificación de las propias ideas y en la elaboración de conceptos.
- Participación en clase con aumento la interacción entre los alumnos y el profesor.
- Se puede llegar a considerar el error no como un fracaso, sino como una forma de aproximación a la solución adecuada.

2.2.- Los docentes ante el planteamiento y resolución de problemas matemáticos

Algunas de las actitudes de los docentes realizan cuando enseñan matemáticas en general y resolución de problemas en particular, podemos resumirlas en:

- Las matemáticas han sido enseñadas tradicionalmente, mediante el aprendizaje de fórmulas y destrezas, repetidas sucesivamente hasta su memorización.
- Los algoritmos de cálculo, que han ocupado más de la mitad del tiempo dedicado a las matemáticas, son tratados como fin y pocas veces como herramienta, quedando como aprendizajes, que en ocasiones nos servirán, para resolver problemas.
- La adquisición de técnicas mentales de cálculo no tiene en la clase la presencia suficiente, y cuestiones como razonar, imaginar, intuir, probar, descubrir, generalizar, aplicar destrezas, estimar, comprobar resultados..., prácticamente no son utilizados.
- Debido a la existencia de un Curriculum excesivamente cargado, diremos en voz baja, que a veces, hemos llegando a dar por sabidos contenidos básicos necesarios para avanzar en nuestra materia, no adaptándonos, a la situación general y/o individual con la que nos ha llegado nuestros alumnos/as.
- Respecto a tener en cuenta las capacidades del alumnado, al comienzo de curso se suele realizar una prueba general de conocimientos, la cual da una idea de cómo están los alumnos, pero no sobre sus capacidades e intereses.
- También tenemos un marcado impulso a que nuestros alumnos ejecuten inmediatamente los conocimientos adquiridos al objeto de avanzar en el temario, sin detenernos en un proceso más lento que asegure un aprendizaje significativo.
- Mostramos poca preocupación por la forma en que los alumnos captan la información, interpretan el contenido y exponen sus ideas. Buscamos el resultado positivo, sin inquietarnos que los avances puede que no sean reflejo de un aprendizaje correcto.
- Prestamos poca atención, confiando en el buen hacer de las editoriales, a la forma en que están redactados el enunciado de los problemas que aparecen en los libro de texto y cuadernos de trabajo complementario, a si logran captar el interés del alumno/a o a desarrollar los pasos que deben llevar a cabo para su resolución.
- Proponemos pocos problemas de forma sistemática en las clases que lleven una graduación que permita a los alumnos/as a enfrentarse poco a poco a ellos con éxito.

- Habitamos a los alumnos/as a realizar problemas sobre la temática que se está desarrollando y muy pocos sobre contenidos que se han impartido con anterioridad, de ahí que el alumno/a caiga en errores forzados cuando le introducimos un problema de contenido distinto al que trabajamos en ese momento.
- Se proponen pocas situaciones de la vida real para traducirlas al lenguaje matemático y poder darle solución, por el contrario, en casi todas las ocasiones, damos el modelo matemático ya redactado para resolverlo, sin que este haya partido de una situación real.
- No realizamos más de 5 modelos distintos de problemas. Esto limita la capacidad del alumno/a de tener recursos para enfrentarse a la resolución de nuevos problemas. Se debería realizar una mayor variedad de planteamientos y de situaciones problemáticas.

Ante esto, podemos concluir que los problemas en el aprendizaje de las matemáticas han sido:

- La presentación lineal de los contenidos matemáticos, en apartados sin apenas relación entre ellos, con independencia del desarrollo del pensamiento matemático del niño.
- La inmovilidad de la metodología empleada, a pesar de los malos resultados generados de generación en generación, sin dar entrada a aspectos intuitivos o deductivos.
- Los problemas se le dan al alumno/a sin tener en cuenta sus intereses, sustituyendo la atracción natural, para resolverlo, que resultaría de algo propio; por otros estímulos más artificiales como son el premio o el temer al error.

Diferencias entre un problema y un ejercicio de aplicación	
Problema matemático	Ejercicio de aplicación
-El individuo se ve expuesto ante una dificultad para la que no tiene un remedio inmediato. -El individuo se implica en su solución. -Requiere utilizar de modo estratégico los procedimientos previamente conocidos. - Las técnicas automatizadas pueden ser necesarias, pero no son suficientes. -Supone al individuo una demanda cognitiva de alto nivel. -La información relevante es una pieza clave en la resolución del Problema.	-Puede resolverse con la aplicación directa de un procedimiento previamente adquirido. -La aplicación rutinaria del algoritmo no exige ningún interés especial. -Requiere la mera aplicación de técnicas automatizadas, ya que éstas son necesarias y suficientes para llegar a la solución. -Supone al individuo una demanda cognitiva de bajo nivel. -El individuo no precisa discernir la información relevante de la irrelevante porque toda la información que aparece en el enunciado es necesaria para la solución.

3.- LENGUAJE Y PROBLEMAS

Las dificultades que puede presentar la lectura de los enunciados matemáticos pueden deberse a varias causas. Dificultades por a la complejidad sintáctica del lenguaje ordinario utilizado en el enunciado, dificultades por a la utilización de vocabulario técnico, dificultades causadas por la utilización de signos matemáticos y dificultades por la incapacidad de relacionar las matemáticas con el contexto. Vamos a analizar cada uno de ellos.

El primer grupo de estos factores se refiere al lenguaje en el que se expresa el enunciado del problema. Este lenguaje presenta una serie de características que pueden complicar la comprensión del problema:

- El lenguaje matemático tiene semejanzas con el lenguaje ordinario pero utiliza palabras y símbolos con un significado totalmente distinto. Ejemplo: Igual, raíz, índice, etc. En matemáticas “igual” se refiere a la igualdad, el signo de igualdad separa dos designaciones de un mismo objeto; en el lenguaje ordinario, quiere decir parecido, similar. En matemáticas, el cuadrado no tiene cuatro lados iguales sino 4 lados de la misma longitud. Si los lados fueran iguales, estarían superpuestos, colocados en el mismo lugar.
- El lenguaje matemático está ausente de valoraciones subjetivas y necesita precisión, así la utilización de términos como delante y detrás del lenguaje ordinario en relación con anterior y posterior, puede provocar confusiones. Ejemplo: en una fila de personas los que están delante o detrás de uno cambiarán dependiendo de que la fila esté mirando a derecha o a izquierda. En matemáticas el número que está “delante” es el “anterior” y el que está “detrás” es el “posterior” y esto no cambiará nunca.
- El lenguaje matemático tiene diferencias con el ordinario, al emplear letras para la representación de variables y la notación alfabética y numérica de los números añaden mayor dificultad a los enunciados de los problemas.
- El orden y la forma de presentación de los datos puede dificultar la traducción del enunciado a una representación mental. Ejemplo el poner sumas, restas en horizontal, la utilización de varios signos para una misma operación (en la división: \div , $/$, $\underline{\hspace{1cm}}$) el uso de ciertas expresiones (paréntesis, fracciones, índices, etc.) que obligan a leer el enunciado en todas las direcciones, no sólo de izquierda a derecha y en su conjunto.
- La presencia de datos irrelevantes para la solución del problema también puede oscurecer su representación mental, pero a la vez nos puede ayudar a entrenar a los alumnos/as a identificar los datos importantes de los superfluos o a deducir que se trata de un problema que no se puede resolver por no disponer de todos los datos necesarios.
- Según algunos estudios cuantas más palabras tenga el enunciado más complicado resultará su resolución, siendo esta influencia mayor en los primeros años de la escolari-

dad que en los últimos. Lo mismo cabe decir del número de operaciones aritméticas que requiere el problema y del tamaño de los números que se emplean (al aumentar el número de operaciones y el tamaño de los números disminuyen las probabilidades de éxito).

- Cuando hablamos en matemáticas de un círculo disponemos de dos palabras diferentes para distinguir la línea y la región interior a la línea (circunferencia y círculo o disco respectivamente). No existen, sin embargo, palabras equivalentes para el cuadrado o el rectángulo; hay que hablar, de lados del cuadrado o del interior del cuadrado.
- En niveles básicos de enseñanza la realidad choca en el lenguaje matemático, el cual es abstracto con conceptos que son intangibles e invisibles, que no existen como tales en la vida real. El lenguaje y la práctica escolar pueden llevar a confundir entre las situaciones reales que se plantean y los modelos matemáticos de dichas situaciones. En los niveles de Infantil y Primaria, los objetos matemáticos, tienen que reflejar esas realidades vivenciales llenas de tangibles y visuales, pero progresivamente, los alumnos/as, deben desprenderse de ellas en los niveles superiores de enseñanza. Ejemplos:
 - En la clase de matemática, y en los libros de texto encontramos expresiones tales como: *"Dibuja una recta, un ángulo, recorta un triángulo, muéstrame un plano, etc."* Como entidades abstractas que son, es obvio que no se puede dibujar una recta o un ángulo. La recta, como entidad matemática, es ilimitada y carece de espesor, no así los dibujos y representaciones gráficas que se hacen de ella. Lo que el alumno dibuja para realizar estas tareas es un trazo (objeto real) que simboliza el concepto de recta, ángulo (objeto abstracto) correspondiente.
 - La circunferencia es un objeto matemático idealizado que no existe en el mundo real. Es una abstracción o generalidad que surge cuando encontramos muchos ejemplos de formas tales como ruedas, relojes, mesas, camilla, etc. Matemáticamente se define como "el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de uno fijo", o el conjunto de pares de números reales que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. Posiblemente si comprobamos esta propiedad en cada uno de los ejemplos anteriores nunca se cumple con exactitud, aunque sí de una forma aproximada.
- Comparativos: En matemáticas se dice de manera indistinta que 3 es más pequeño que 5, o que 5 es más grande que 3. en el dominio de las magnitudes se dice que la cuerda A es más corta que la cuerda B, o bien que la cuerda B es más grande que la cuerda A, o que la cuerda A es menos larga que la cuerda B; pero nunca se dice que la cuerda B es menos corta que la cuerda A.

4.- CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS MATEMÁTICOS.

4.1. -Por la forma de aparecer los datos y la pregunta

La complejidad de los algoritmos implicados en su resolución nos permite distinguir seis grupos de problemas:

- Problemas CONSISTENTES o simples: En este tipo de problemas los datos y pregunta del enunciado llevan directamente a la solución y al algoritmo que se ha de aplicar que se pueden resolver con una sola operación. Si el problema es de restar, primero aparece el minuendo y después el sustraendo; si es de dividir, primero aparece el dividendo y luego el divisor. Por lo que respecta a la pregunta, en este tipo de problemas, debe ir al final del texto y preguntar por la cantidad final.

Ejemplo:

- “Manuel tenía ocho monedas y su abuelo le regala cuatro más. ¿Cuántas monedas tiene ahora?.
- “Un pastor tenía doce ovejas y vendió cuatro. ¿Cuántas ovejas le quedan?”.
- Problemas INCONSISTENTES O simples invertidos: En este tipo de problemas los datos y pregunta del enunciado se presentan en orden inverso al que corresponde a la operación aritmética requerida para su resolución y que también se pueden resolver con una sola operación.

Si el problema es de restar, primero aparece el sustraendo y luego el minuendo, o si es de dividir, primero aparece el divisor y luego el dividendo. En dichos problemas la pregunta se refiere a la cantidad inicial o a la transformación y se formula al principio o en medio del enunciado.

También se consideran inconsistentes aquellos problemas cuyo enunciado contiene un concepto verbal con significado contrario a la operación requerida para su resolución como puede ser “**más**” cuando es de restar o “**menos**” cuando es de sumar. Esto hace que surja un conflicto en el sujeto cuando intenta resolver el problema, ya que debe vencer la tendencia a resolverlo de manera rectilínea por la lectura de los datos del problema.

Ejemplos de problemas inconsistentes:

- “¿Cuántos cromos le faltan a Manuel, que tiene ocho cromos, para tener la misma cantidad que Luís, que tiene doce cromos?”

Este es un problema INCONSISTENTE porque la pregunta está situada al principio y además el orden de los datos es inverso al requerido por la operación..

- “Manuel tiene doce cromos y Luis tiene seis cromos. ¿Cuántos cromos tiene Manuel más que Luis?”

Se trata de un problema INCONSISTENTE porque la resolución del problema induce al error, ya que el concepto verbal “más” el alumno lo asocia con añadir o sumar, mientras que el problema se resuelve restando.

4.2.- Por su estructura semántica:

Centrándonos en los problemas que podemos encontrar en Educación Primaria y partiendo de la clasificación que hacen, entre otros, J. Luis Luceño Campos y Jaime Martínez Montero, tenemos los siguientes tipos de problemas:

- En los problemas de estructura aditiva tendríamos las siguientes categorías básicas: cambio, combinación y comparación e igualación.

Dentro de los problemas la clasificación de cambio y combinación diferenciaremos en base a que las cantidades utilizadas sean de la misma (cambio) o de distinta naturaleza (combinación).

- En los problemas de estructura multiplicativa tendríamos las siguientes categorías: multiplicación-división-razón, multiplicación-división-escalares y multiplicación-división-combinación (producto cartesiano).

Así pues, en cada problema que presentamos a continuación tendremos en cuenta:

- Categoría y tipo.
- Nivel de dificultad por edades, ciclo y curso académico.
- Ejemplos.

4.2.1.- Problemas de suma y resta con una operación

A.- Categoría de CAMBIO y sus tipos

La categoría de CAMBIO (CA): Se trata de problemas en los que se parte de una cantidad, a la que se añade o se le quita otra de la misma naturaleza.

En los problemas de CAMBIO se puede preguntar por la cantidad final, por la cantidad resultante de la transformación, y por último la cantidad inicial.

Cada una de estas tres posibilidades se puede enfocar desde dos puntos de vista: la cantidad crece o decrece.

De aquí surgen los 6 tipos de problemas de CAMBIO:

TIPO DE PROBLEMAS	NIVEL ACADÉMICO	EJEMPLOS
CAMBIO 1 (CA1) Problema de sumar. Se conoce cantidad inicial. Se le hace crecer. Se pregunta por la cantidad final.	1 ^{er} Ciclo I 1º E. Primaria 6 años.	“Antonio tenía en su hucha ocho euros. Después de su comunión, metió otros doce euros. ¿Cuánto dinero tiene ahora en la hucha?”
CAMBIO 2 (CA2) Problema de restar: se parte de una cantidad inicial a la que se le hace disminuir. Se pregunta por la cantidad final.	Ciclo Iº 1º E. Primaria 6 años	"Antonio tenía en su hucha ocho euros. En su cumpleaños se ha gastado cinco euros. ¿Cuánto dinero tiene ahora en la hucha?"
CAMBIO 3 (CA3) Problema de restar: se conoce la cantidad inicial y se llega, mediante una transformación, a una cantidad final conocida mayor. Se pregunta por el aumento (transformación)	Ciclo Iº-IIº 2º-3º E. Primaria 7 - 8 años	"Andrés tenía catorce tazos. Después de jugar ha reunido dieciocho. ¿Cuántos ha ganado?"
CAMBIO 4 (CA4) Problema de restar: Se parte de una cantidad inicial y, por una transformación, se llega a una cantidad final conocida y menor que la inicial. Se pregunta por la transformación.	Ciclo Iº-IIº 2º E. Primaria 7 - 8 años	"Andrés tenía catorce tazos. Después de jugar le quedan sólo ocho tazos. ¿Cuántos ha perdido?"
CAMBIO 5 (CA5) Problema de restar: se tiene que averiguar la cantidad inicial conociendo la cantidad final y lo que ha aumentado. Se pregunta cantidad inicial.	Ciclo Iº-IIº 2º-3º E. Primaria 8 - 9 años	"Jugando he ganado 7 canicas, y ahora tengo 11. ¿Cuántas canicas tenía antes de empezar a jugar?"
CAMBIO 6 (CA6) Problema de sumar: se tiene que averiguar la cantidad inicial y se conoce la cantidad final y su disminución. Se pregunta cantidad inicial.	Ciclo Iº-IIº 2º-3º E. Primaria 8 años	Jugando he perdido 7 canicas, y ahora me quedan 4. ¿Cuántas canicas tenía antes de empezar a jugar?"

(Fuente: “Proyecto de Formación en Centros”. Equipo de Orientación Educativa y Psicopedagógica de Ponferrada)

A2.- Categoría de COMBINACIÓN y sus tipos

La categoría de COMBINACIÓN (CO): se trata de problemas en los que se tienen dos cantidades, las cuales se diferencian en alguna característica.

En los problemas de COMBINACIÓN se puede preguntar por la cantidad total que se obtiene cuando se reúnen las anteriores, o cuando conociendo la total y una de aquellas, se quiere saber cuál es la otra.

De aquí surgen los 2 tipos de problemas de COMBINACIÓN.

TIPO DE PROBLEMAS	NIVEL ACADÉMICO	EJEMPLOS
COMBINACIÓN 1 (CO1) Problema de sumar: se conocen las dos partes y se pregunta por el todo.	1 ^{er} Ciclo I 1º E. Primaria 6 años.	"Luisa tiene doce bombones rellenos y cinco normales. ¿Cuántos bombones tiene Luisa en total?"
COMBINACIÓN 2 (CO2) Problema conmutativo y de restar: es el problema inverso al anterior, puesto que se conoce el todo y una de las partes, y se pregunta por la otra.	Ciclo Iº-IIº 2º-3º E. Primaria 8 años	"Luisa tiene doce bombones contando los rellenos y los normales. Si tiene diez rellenos, ¿cuántos bombones normales tiene Luisa?"

(Fuente: "Proyecto de Formación en Centros". Equipo de Orientación Educativa y Psicopedagógica de Ponferrada)

A3.- Categoría de COMPARACIÓN y sus tipos

La categoría de COMPARACIÓN (CM): Problemas en los que se comparan dos cantidades. Los datos del problema son precisamente esas cantidades y la diferencia que existe entre ellas. De estas dos cantidades, una es la comparada y otra la que sirve de referente. La diferencia es la distancia que se establece entre ambas.

En los problemas de COMPARACIÓN se puede preguntar por la diferencia si se conocen las dos cantidades, por la cantidad comparada cuando se conocen el referente y la diferencia, o por la cantidad referente, si se conocen la comparada y la diferencia.

Cada una de estas tres posibilidades se puede enfocar desde dos puntos de vista: si preguntamos por cuántos más o por cuántos menos.

De aquí surgen los 6 tipos de problemas de COMPARACIÓN

TIPO DE PROBLEMAS	NIVEL ACADÉMICO	EJEMPLOS
COMPARACIÓN 1 (CM1) Problema de restar: Conocemos las dos cantidades y se pregunta por la diferencia en el sentido del que tiene más. Problema de INCONSISTENTE. Es difícil porque la formulación del pro-	Ciclo Iº-IIº 3º E. Primaria 8 años	"Marcos tiene ocho euros. Raquel tiene cinco euros. ¿Cuántos euros más que Raquel tiene Marcos?"

TIPO DE PROBLEMAS	NIVEL ACADÉMICO	EJEMPLOS
blema induce al error, ya que el alumno/a asocia “añadir” a “sumar”		
COMPARACIÓN 2 (CM2) Problema de restar: conocemos las dos cantidades y se pregunta por la diferencia en el sentido del que tiene menos.	Ciclo Iº-IIº 1º-3º E. Primaria 6 - 8 años	"Marcos tiene treinta y siete euros. Raquel tiene doce euros. ¿Cuántos euros tiene Raquel menos que Marcos?"
COMPARACIÓN 3 (CM3) Problema de sumar: se conoce la cantidad del 1º y la diferencia “en más” del 2º. Se pregunta por la cantidad del 2º.	Ciclo Iº-IIº 2º-3º E. Primaria 8-9 años	"Esther tiene ocho euros. Irene tiene cinco euros más que ella. ¿Cuánto dinero tiene Irene?"
COMPARACIÓN 4 (CM4) Problema de restar: se conoce la cantidad del 1º y la diferencia “en menos” del 2º. Se pregunta por la cantidad del 2º Problema para el 1º Ciclo de EP. aunque algunos alumnos/as no lo dominan hasta el 2º Ciclo.	Ciclo Iº 2º E. Primaria 7-8 años	"Esther tiene ocho euros. Irene tiene cinco euros menos que ella. ¿Cuánto dinero tiene Irene?"
COMPARACIÓN 5 (CM5) Problema de restar: se conoce la cantidad del 1º y su diferencia “en más” con la del 2º. Se pregunta por cantidad del 2º Problemas para el 2 - 3º Ciclo de E P, y requiere mucho entrenamiento.	Ciclo IIº-IIIº 2º-3º E. Primaria 8-11 años	"Rosa tiene diecisiete euros, y tiene cinco euros más que Carlos. ¿Cuántos euros tiene Carlos?"
COMPARACIÓN 6 (CM6) Problema de sumar: se conoce la cantidad del 1º y su diferencia “en menos” con la del 2º. Se pregunta por cantidad del 2º Problemas para el 2º - 3º Ciclo de E P. Y requiere mucho entrenamiento.	Ciclo IIº-IIIº 2º-3º E. Primaria 8-11 años	"Rosa tiene diecisiete euros, y tiene cinco euros menos que Carlos. ¿Cuántos euros tiene Carlos?"

(Fuente: “Proyecto de Formación en Centros”. Equipo de Orientación Educativa y Psicopedagógica de Ponferrada)

A4.- Categoría de IGUALACIÓN y sus tipos

La categoría de IGUALACIÓN (IG): Problemas que contienen dos cantidades diferentes, sobre una de las cuales se actúa aumentándola o disminuyéndola hasta hacerla igual

a la otra, de estas dos cantidades, una es la cantidad a igualar y la otra es la cantidad referente. La transformación que se produce en una de dichas cantidades es la igualación.

La diferenciación con la categoría de comparación está en que cuando se compara no se añade ni se quita nada, cuando se iguala necesariamente se añade o quita algo.

En los problemas de IGUALACIÓN se puede preguntar por la cantidad a igualar, por la referente o por la igualación.

Cada una de estas tres posibilidades se puede enfocar desde dos puntos de vista: según que la igualación sea de añadir o de quitar.

De aquí surgen los 6 tipos de problemas de IGUALACIÓN.

TIPO DE PROBLEMAS	NIVEL ACADÉMICO	EJEMPLOS
<p>IGUALACIÓN 1 (IG1) Problema de restar: conocemos cantidades del 1º y del 2º. Se pregunta por el aumento de la cantidad menor para igualarla a la mayor.</p> <p>Problema INCONSISTENTE. Es difícil porque la formulación del problema induce al error, ya que el alumno/a asocia “añadir “ a “sumar”.</p>	<p>Ciclo IIº 3º- 4º E. Primaria 9 - 10 años</p>	<p>“Marcos tiene ocho euros. Raquel tiene cinco euros. ¿Cuántos euros le tienen que dar a Raquel para que tenga los mismos que Marcos?”</p>
<p>IGUALACIÓN 2 (IG2) Problema de restar: conocemos cantidades del 1º y del 2º y se pregunta por la disminución de la cantidad mayor para igualarla a la menor.</p>	<p>Ciclo IIº 3º- 4º E. Primaria 9 - 10 años</p>	<p>“Marcos tiene ocho euros. Raquel tiene cinco euros. ¿Cuántos euros tiene que perder Marcos, para tener los mismos que Raquel?”</p>
<p>IGUALACIÓN 3 (IG3) Problema de restar muy difícil: conocemos la cantidad del 1º y lo que hay que añadir a la 2º para igualarla con la 1ª. Se pregunta por la cantidad del 2º.</p> <p>Problema INCONSISTENTE. La dificultad principal radica en que refleja una situación de igualación en que, para alcanzar la solución, se debe realizar lo contrario de lo que señala el</p>	<p>Ciclo IIº 3º- 4º E. Primaria 9 - 10 años</p>	<p>“Juan tiene diecisiete euros. Si Rebeca ganara seis euros, tendría los mismos que Juan. ¿Cuántos euros tiene Rebeca?”</p>

TIPO DE PROBLEMAS	NIVEL ACADÉMICO	EJEMPLOS
enunciado.		
<p>IGUALACIÓN 4 (IG4) Problema de sumar muy difícil: conocemos cantidades del 1º y lo que hay que quitar a la 2º para igualarla con la 1ª. Se pregunta por la cantidad del 2º. Problema INCONSISTENTE. La dificultad principal radica en que refleja una situación de igualación en que, para alcanzar la solución, se debe realizar lo contrario de lo que señala el enunciado.</p>	<p>Ciclo IIº 3º- 4º E. Primaria 9 - 10 años</p>	<p>“Juan tiene diecisiete euros. Si Rebeca perdiera seis euros, tendría los mismos que Juan. ¿Cuántos euros tiene Rebeca?”</p>
<p>IGUALACIÓN 5 (IG5) Problema de sumar: conocemos cantidades del 1º y lo que hay que añadirle para igualarla con la del 2º. Se pregunta por la cantidad del 2º.</p>	<p>Ciclo IIº-IIIº 3º- 4º-5º E. Pri. 9 - 11 años</p>	<p>“Marcos tiene ocho euros . Si le dieran cinco euros más, tendría los mismos que tiene Rafael.¿ Cuántos euros tiene Rafael?”</p>
<p>IGUALACIÓN 6 (IG6) Problema de restar: conocemos cantidades del 1º y lo que hay que quitarle para igualarla con la del 2º. Se pregunta por la cantidad del 2º.</p>	<p>Ciclo IIº-IIIº 3º- 4º-5º E. Pri. 9 - 11 años</p>	<p>“Marcos tiene ocho euros . Si perdiera cinco euros más, tendría los mismos que tiene Rafael.¿ Cuántos euros tiene Rafael?”</p>

(Fuente: “Proyecto de Formación en Centros”. Equipo de Orientación Educativa y Psicopedagógica de Ponferrada)

4.2.2.- Problemas de multiplicar y dividir

A.- Problemas de multiplicar:

El tratamiento didáctico de los problemas con estructura multiplicativa, desde el punto de vista semántico, requiere un pequeño análisis previo de los elementos que vamos a tener en cuenta para su clasificación: el multiplicador, la distinción entre cantidades intensivas y extensivas, y las combinaciones entre los elementos que las componen.

A.1.- El Multiplicador:

Debemos conseguir que los alumnos/as entiendan al multiplicador como un número distinto a los que trabajó hasta ahora. Por tanto tendrá que descubrir su nuevas propiedades:

A.- Que se trate de una unidad flexible que hay que determinar en cada situación problemática.

A.1.- El multiplicador puede ser el número que indica cuántas veces se repite una cantidad de la misma naturaleza. Ejemplo:

“Tengo tres bolsas de tomates con ocho tomates cada una. ¿Cuántos tomates tengo?”. Los tomates se repiten una determinada serie de veces, sin embargo el resultado sigue siendo tomates.

A.2.- El multiplicador también puede indicar una cantidad de diferente naturaleza a la representada por el multiplicando. Ejemplo:

“Tengo treinta kilos de tomates a dos euros cada kilo. ¿Cuánto cuestan los tomates?”. El resultado ya no son tomates sino euros, es decir, cambia el referente.

B.- El multiplicador puede representar una proporción/razón que se establece entre dos cantidades. Ejemplo: “20 tomates por bolsa, Un ordenador por cada dos alumnos”. En este caso tampoco hay transformación del referente, ni existe una realidad física que represente dicha proporción, sino sólo una relación mental entre dichas cantidades.

C.- En el producto cartesiano combinamos las cantidades del multiplicando y del multiplicador para obtener una tercera (producto) diferente.

D.- Que se trata de un mecanismo que permite economizar tiempo y esfuerzo sustituyendo varias sumas por una sola operación. Cuando un niño utiliza la suma para resolver un problema de multiplicar es que no ha entendido el significado del multiplicador.

B.2.- Cantidades extensivas e intensivas:

Las cantidades extensivas son aquellas que tienen una extensión y pertenecen al mundo real (manzanas, mesas, dinero, etc.). Dichas cantidades pueden ser: continuas (longitud, peso, capacidad...) o discontinuas (naranjas, dinero, caramelos...).

Las cantidades intensivas son aquellas que se forman por combinación o razón de cantidades extensivas. Son razones o proporciones que establecemos, pero que no están físicamente en ninguna parte. Ejemplo “kilómetros por hora, la densidad, unidades de producto por envase, densidad”.

Un caso especial de este tipo de cantidades intensivas son los escalares, o proporciones a escala que se establecen entre cantidades extensivas o intensivas.

Existen distintas combinación de cantidades extensivas para formar cantidades intensivas:

- A.- Extensivas: discontinuas / discontinuas: “pasajeros por autobús”, “huevos por envase”...
- B.- Extensivas: continuas / discontinuas: “Kilos de tomates por caja”.
- C.- Extensivas: continuas / continuas: “km por hora, tiempo en recorrer una distancia.”

A.3.- Las Combinaciones (Producto Cartesiano)

La multiplicación es una operación que permite resolver las combinaciones que se pueden establecer entre los elementos de dos conjuntos. Por ejemplo, calcular cuántas parejas de baile se podrían formar con un conjunto de chicos y otro de chicas.

Las distintas combinaciones se construyen mentalmente, si bien algunas se pueden reproducir en la realidad y otras no.

B.- Problemas de Dividir:

A partir de una multiplicación dada ($60 \times 4 = 240$), se originan dos posibles divisiones ($240 : 60 = 4$ y $240 : 4 = 60$) en función de la cantidad que se tome por divisor. Ambas son conceptualmente iguales, pero una es una **partición** y la otra es un **agrupamiento**.

B.1.- División Partitiva:

La división de **partición** correspondería al siguiente problema: “*Se reparten por igual 240 pasajeros entre 4 autobuses. ¿Cuántos pasajeros viajan en cada uno?.*”

Sería aquella en la que el dividendo (pasajeros) y el divisor (autobuses) son de distinta naturaleza. Se hace una partición del conjunto de pasajeros porque se pregunta por la proporción o razón (60 pasajeros por autobús).

B.2.- División por Agrupamiento:

La división de **agrupamiento** correspondería al siguiente problema: “*Se reparten por igual 240 pasajeros entre varios autobuses. Si cada autobús transporta 60 pasajeros, ¿cuántos autobuses se necesitan?.*”

Sería aquella en la que el dividendo (*pasajeros*) y el divisor (*pasajeros por autobús*) son de la misma naturaleza. Se pregunta por el número de autobuses, es decir, una realidad concreta y no por una proporción.

B.3.- Categorías de los problemas de estructura multiplicativa:

Aclarados los conceptos anteriores, en el apartado siguiente presentamos las categorías semánticas de los problemas de estructura multiplicativa (problemas de multipli-

car/dividir). Para la clasificación semántica de estos problemas nos fijaremos en el carácter y tipo de cantidades que se utilizan.

B.3.1.- Categoría de MULTIPLICACIÓN - DIVISIÓN RAZÓN y sus tipos

Problemas en los que se establecen entre los datos y la solución una función de proporcionalidad directa. Se trata de problemas que utilizan cantidades extensivas discontinuas (naranjas, dinero, caramelos...).

Es la categoría más sencilla al no plantear contradicciones entre su sentido y las operaciones con las que se resuelven. Dichas operaciones guardan un estrecho parentesco con las de sumar y restar, por lo que a veces los alumnos los resuelvan con estas últimas.

TIPO DE PROBLEMA	NIVEL ACADÉMICO	EJERCICIOS
<p>MULTIPLICACIÓN RAZÓN 1 Dada una cantidad de determinada naturaleza (multiplicando) y el “número de veces” que se repite (multiplicador- Razón 1), se pregunta por la cantidad resultante (producto), que es de la misma naturaleza que el multiplicando.</p>	<p>Ciclo Iº-IIº 2º-3º E. Primaria 7 - 8 años</p>	<p>“Agustín lleva al contenedor ocho envases vacíos de vidrio, va cuatro veces en el día, y siempre que va lleva el mismo nº de envases. ¿Cuántos envases ha llevado en total durante el día?”</p>
<p>MULTIPLICACIÓN RAZÓN 2 Dadas dos cantidades de la misma naturaleza (multiplicando y multiplicador), se pregunta por la cantidad resultante (producto) que es de la misma naturaleza.</p>	<p>Ciclo Iº-IIº 2º-3º E. Primaria 7 - 8 años</p>	<p>“Hay cuatro montones de manzanas, cada montón tiene treinta y dos manzanas. ¿Cuántas manzanas hay en total en los cuatro montones?”.</p>
<p>MULTIPLICACIÓN RAZÓN 3 Dada una cantidad de naturaleza “A” (multiplicando) y otra de naturaleza “B” (multiplicador- Razón3), se pregunta por la cantidad resultante (producto) de la misma naturaleza que el multiplicador. Es un problema donde se establece una relación o proporción fija que se cumple en todos los casos comprendidos en el multiplicador.</p>	<p>Ciclo Iº-IIº 2º-3º E. Primaria 7 - 8 años</p>	<p>“Jaime compra cinco cuentos. Cada cuento cuesta tres euros ¿Cuántos euros pagó?”.</p>
<p>DIVISIÓN PARTICIÓN / RAZÓN Dada una cantidad de naturaleza “A” (dividendo) y otra de naturaleza “B” (divisor), se pregunta por la cantidad</p>	<p>Ciclo Iº-IIº 2º-3º E. Primaria 7 - 8 años</p>	<p>“Una colección consta de noventa y seis cromos. Su álbum tiene doce páginas. En todas ellas se pega el mismo nº de</p>

TIPO DE PROBLEMA	NIVEL ACADÉMICO	EJERCICIOS
resultante (cociente) de la misma naturaleza que el dividendo.		cromos. ¿Cuántos cromos se pegan en cada página?”.
<p style="text-align: center;">DIVISIÓN POR AGRUPAMIENTO RAZÓN</p> Dadas dos cantidades de la misma naturaleza (dividendo y divisor), se pregunta por la cantidad resultante (cociente) de distinta naturaleza que las anteriores.	Ciclo II° 3° E. Primaria 8 años.	“Una colección consta de 96 cromos. Si en cada página del álbum pegamos 8 cromos. ¿Cuántas páginas tendrá el álbum?”.

(Fuente: “Proyecto de Formación en Centros”. Equipo de Orientación Educativa y Psicopedagógica de Ponferrada)

B.3.2. - Categoría de MULTIPLICACIÓN - DIVISIÓN ESCALARES

Las cantidades escalares, como hemos indicado, son un caso especial de cantidades intensivas, donde se establece una proporciones a escala entre las cantidades extensivas o intensivas. Sus tipos pueden ser:

1.- Comparación: Utilizan los términos “veces más”, “veces menos”, “doble”, “triple”, etc.

El lenguaje en que se expresa el problema, al igual que ocurre en los problemas de estructura aditiva, puede dar lugar a interpretaciones erróneas por los niños, al tener un sentido distinto con el que se presentan las operaciones que lo resuelven. En estos casos hablaremos nuevamente de problemas inconsistentes. Ejemplo:

“Cuando en el enunciado de un problemas se expresa “3 veces más” puede ser interpretada como adición y en el caso de “3 veces menos” como resta.”

En los problemas de comparación, el carácter del texto que envuelve al problema es de tipo estático, que implica la ausencia de acciones. Ello hace que sólo intervengan verbos de estado, y no aparezcan por ningún lado verbos de acción.

TIPO DE PROBLEMA	NIVEL ACADÉMICO	EJEMPLOS
<p style="text-align: center;">MULTIPLICACIÓN COMPARACIÓN “EN MÁS”</p> Problema de multiplicar que expresa la regla de proporción entre ambas cantidades. Dada la cantidad de uno (multiplicando) y las veces que otro la tiene	Ciclo II°-III° 4°-5° E. Pri. 9-11 años	“Juan tiene ocho euros. Luisa tiene cuatro veces más dinero que él. ¿Cuánto dinero tiene Luisa?”.

TIPO DE PROBLEMA	NIVEL ACADÉMICO	EJEMPLOS
de más (multiplicador), se pregunta por la cantidad resultante (producto) de la misma naturaleza que el multiplicando.		
<p>DIVISIÓN PARTITIVA COMPARACIÓN “EN MÁS”</p> <p>Dada la cantidad de uno (dividendo) y las veces que otro la tiene de más (divisor), se pregunta por la cantidad resultante (cociente) de la misma naturaleza que el dividendo.</p>	<p>Ciclo IIº-IIIº 4º-5º E. Pri. 9-11 años</p>	<p>“Luisa tiene treinta y dos euros, que es cuatro veces más que el dinero que tiene Juan. ¿Cuántos euros tiene Juan?”.</p>
<p>DIVISIÓN POR AGRUPAMIENTO COMPARACIÓN “EN MÁS”.</p> <p>Problema que se resuelve con una división por agrupación, porque el dividendo y el divisor son de la misma naturaleza.</p> <p>Dadas dos cantidades de la misma naturaleza (dividendo y divisor), se pregunta por el número de veces (cociente) que una es mayor que otra. Es un problema de pura comparación, puesto que no hay nada que se parezca a un reparto.</p>	<p>Ciclo II-III (4º-5º E.P.) 9-11 años</p>	<p>“Antonio recibe cada fin de semana 25 euros. Su primo Daniel 100 euros. ¿Cuántas veces más recibe Daniel que Antonio?”.</p>
<p>MULTIPLICACIÓN COMPARACIÓN “EN MENOS”</p> <p>Este problema inconsistente que se resuelve con una multiplicación. Dada la cantidad de uno (multiplicando) y las veces que otro la tiene de menos (multiplicador), se pregunta por la cantidad resultante (producto) de la misma naturaleza que el multiplicando.</p> <p>Es complicado porque su sentido y vocabulario induce a otras operaciones (resta o división).</p>	<p>Ciclo IIIº 5º-6º E. Pri. 10 -11 años</p>	<p>“Aurelio tiene 8 euros. Tiene tres veces menos dinero que Ana. ¿Cuánto dinero tiene Ana? “.</p>
<p>DIVISIÓN PARTITIVA COMPARACIÓN “EN MENOS”</p> <p>Problema que se resuelve con una división Partitiva. Dada la cantidad de uno (dividendo) y las veces que otro la tie-</p>	<p>Ciclo IIIº 5º-6º E. Pri. 10 -11 años</p>	<p>“Ángel tiene treinta y seis euros. Marta tiene cuatro veces menos dinero que Ángel. ¿Cuántos euros tiene Marta?”.</p>

TIPO DE PROBLEMA	NIVEL ACA- DÉMICO	EJEMPLOS
ne de menos (divisor), se pregunta por la cantidad resultante (cociente) de la misma naturaleza que el dividendo.		
<p>DIVISIÓN POR AGRUPAMIENTO COMPARACIÓN “EN MENOS”</p> <p>Problema que se resuelve con una división por agrupación, porque el dividendo y el divisor son de la misma naturaleza. Dadas dos cantidades de la misma naturaleza (dividendo y divisor), se pregunta por el número de veces (cociente) que una es menor que otra.</p>	<p>Ciclo IIIº 5º-6º E. Pri. 10 -11 años</p>	<p>“Mª Carmen tiene cuarenta y cinco euros . Félix tiene nueve euros ¿Cuántas veces menos dinero tiene Félix que Mª Carmen?”.</p>

(Fuente: “Proyecto de Formación en Centros”. Equipo de Orientación Educativa y Psicopedagógica de Ponferrada)

2. - Fórmula: Son los que dependen de una fórmula. Por ejemplo los que ligan velocidad, tiempo y espacio recorrido.

TIPO DE PROBLEMA	NIVEL ACA- DÉMICO	EJEMPLOS
<p>MULTIPLICACIÓN FÓRMULA</p> <p>Equivale a un problema de Multiplicación Razón 3, aunque utiliza conceptos de espacio y tiempo que implican una mayor dificultad.</p>	<p>Ciclo IIIº 5º-6º E. Pri. 10 -11 años</p>	<p>“Un señor recorre cuarenta y cinco Km. en una hora. ¿Cuántos Km. recorrerá en tres horas?”.</p>
<p>DIVISIÓN POR AGRUPAMIENTO FÓRMULA</p> <p>Equivale a un problema de División Razón por agrupamiento, aunque utiliza conceptos de espacio y tiempo que implican una mayor dificultad.</p>	<p>Ciclo IIIº 5º-6º E. Pri. 10 -11 años</p>	<p>“Si caminas a una velocidad de cinco Km. por hora. ¿Cuántas horas tardarás en recorrer veinticinco Km.?”.</p>
<p>DIVISIÓN PARTITIVA FÓRMULA</p> <p>Equivale a un problema de División Razón Partición, aunque utiliza conceptos de espacio y tiempo que implican una mayor dificultad.</p>	<p>Ciclo IIIº 5º-6º E. Pri. 10 -11 años</p>	<p>“¿ A qué velocidad irá un coche, si en 5 horas recorre 650 Km?”.</p>

(Fuente: “Proyecto de Formación en Centros”. Equipo de Orientación Educativa y Psicopedagógica de Ponferrada)

B.3.3. - Categoría de MULTIPLICACIÓN-DIVISIÓN COMBINACIÓN o PRODUCTO CARTESIANO

Esta categoría implica la combinación de dos cantidades determinadas, para formar una tercera que no es igual ni al multiplicando ni al multiplicador. Es el caso del producto cartesiano, donde se establece la combinación uno a uno de los elementos de los dos factores, con independencia del orden de colocación de los mismos.

Son problemas muy difíciles para los niños. Emplean cantidades simétricas, puesto que ambas juegan el mismo papel. Por ello la multiplicación es conmutativa y tan sólo se presenta un tipo de problemas de dividir.

TIPO DE PROBLEMA	NIVEL ACADÉMICO	EJEMPLOS
<p>MULTIPLICACIÓN COMBINACIÓN PRODUCTO CARTESIANO 1 (PC 1) Dadas dos cantidades de distinta naturaleza (multiplicando y multiplicador), se pregunta por el número de combinaciones posibles (producto).</p>	<p>Ciclo IIIº 5º-6º E. Pri. 10 -11 años</p>	<p>“En un baile hay tres chicos y dos chicas. ¿Cuántas parejas distintas se pueden formar?”.</p>
<p>DIVISIÓN COMBINACIÓN O PRODUCTO CARTESIANO 2 (PC 2) Dada una cantidad (dividendo) y el número de combinaciones (divisor), se pregunta por la otra cantidad que se combina (cociente).</p>	<p>Ciclo IIIº 5º-6º E. Pri. 10 -11 años</p>	<p>“En un baile hay tres chicos y algunas chicas. Se pueden formar seis parejas distintas entre ellos. ¿Cuántas chicas hay en el baile?”.</p>

(Fuente: “Proyecto de Formación en Centros”. Equipo de Orientación Educativa y Psicopedagógica de Ponferrada)

5.- ERRORES Y DIFICULTADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Las estrategias utilizadas por los alumnos son de las que se consideran como básicas: leer el problema; buscar datos; relacionarse colaborativamente entre los estudiantes. Las menos utilizadas, se pueden asociar a estrategias más avanzadas, como: generar planificación para resolver el problema; ejecutar este plan; y discutir sobre lo aprendido.

Se puede decir generalizando, que los alumnos/as fundamentalmente trabajaban de manera intuitiva respecto a estrategias de resolución de problemas.

Los alumnos recurren con frecuencia a metodologías superficiales que les llevan a numerosos errores. Los maestros solemos atribuir estos errores a comportamientos propios y casi exclusivos de los alumnos. Sin embargo, la investigación educativa ha planteado algunas hipótesis alternativas sobre el origen de tales errores.

5.1.- Factores que influyen en los errores de los alumnos:

Analizaremos primero las cuatro dimensiones consideradas por Schoenfeld en relación con los factores intervinientes en la resolución de problemas relativos al alumno: Conocimientos de base, heurísticos, “metacognición” y componentes afectivos.

A.- Conocimiento base

Dentro de esta dimensión están tanto los conocimientos de base que posee el individuo, como el acceso que tiene a ellos y cómo los utiliza. Los que resuelven fácilmente problemas se caracterizan por la cantidad de conocimientos que poseen y por cómo organizan su almacenamiento (acceso fácil y rápido cuando la tarea lo requiere).

Los conocimientos de base incluyen los conocimientos formales e informales sobre hechos, definiciones y procedimientos matemáticos. Todos ellos intervienen en las distintas fases de la resolución de un Problema. Así por ejemplo:

- En la fase de identificación y definición del problema, estarán implicados los conocimientos:
 - Lingüísticos. Conocimiento del idioma en el que está expresado el enunciado.
 - Semántico. Conocimiento del significado de las palabras, expresiones y oraciones del enunciado
 - Esquemático. Conocimiento del tipo de problema al que pertenece el enunciado. Este conocimiento aclara el problema y a la vez da pistas sobre su resolución.

- En la fase de planificación de la solución intervendría el *conocimiento estratégico* o conocimiento de las técnicas generales de resolución de problemas, también llamados heurísticos.
- En la fase de ejecución del plan estarán implicados los conocimientos:
 - o El *procedimental* o conocimiento sobre cómo ejecutar una secuencia de operaciones: Ejemplo: cómo realizar una multiplicación.
 - o El *conocimiento condicional* o conocimiento estratégico que permite al alumno seleccionar y aplicar las destrezas apropiadas y ajustar su conducta a las demandas del problema.

B.- Heurísticos (técnicas generales de resolución de problemas)

Son estrategias generales de resolución de problemas, sin contenido matemático, que no aseguran llegar a la solución del problema, así como no suelen dar frutos en aquellos que no están familiarizados con la técnica, pero si aumentan las posibilidades de alcanzar la solución si se ejercitan en ellas. Ejemplos de heurísticos son:

- La semejanza con otros problemas resueltos previamente.
- Representar gráficamente o dramatizar el problema
- Cambiar los datos numéricos por otros más sencillos.
- Partir de una posible solución y buscar el camino para llegar a ella
- La descomposición del problema en otros más simples.
- La generalización de la solución obtenida, etc.

C.- Metacognición

Este concepto hace referencia a la autoevaluación que hace el alumno/a de sus propias capacidades y limitaciones en la resolución de problemas. De esta manera serían los responsables de las distintas decisiones que toma en el desarrollo de la resolución de los mismos.

Un adecuado desarrollo de las habilidades “metacognitivas” dará como resultado que el alumno no abandone la resolución del problema fácilmente, fomente el pensamiento crítico y flexible así como se cuestione sus propios conocimientos.

D.- Componentes afectivos (analizados anteriormente)

5.2.- Dificultades en la resolución de problemas matemáticos

El bajo rendimiento de los alumnos en la resolución de problemas, está más relacionado con su incapacidad para comprender, representar los problemas y seleccionar las operaciones adecuadas, que con los errores de ejecución.

La resolución de problemas implica la comprensión y dominio de un conjunto de conceptos y procedimientos que ya no es posible reducir a la mera ejecución de operaciones matemáticas. En primer lugar, el dominio de códigos simbólicos especializados y, en segundo lugar, la capacidad de traducción desde otros códigos a los códigos matemáticos y viceversa.

Partiendo del análisis anterior, examinaremos los errores más frecuentes que manifiestan los alumnos en cuanto a sus conocimientos de base, heurísticos, metacognitivos y de componentes afectivos.

A.- Dificultades en el conocimiento base

Cuando nos encontremos en un nivel inicial y el error está causado por la posición del orden de los datos en el texto o por la situación de la pregunta en el enunciado (problemas inconsistentes), podemos solucionarlo cambiando los datos o la pregunta al orden correspondiente a la operación requerida.

Ejemplo: en el problema: “Vendo tres cajas de tomates y tenía doce ¿Cuántas cajas le quedan? Los datos no siguen el orden correspondiente a la operación requerida para su resolución, por lo que si el niño no lo resuelve correctamente, podemos plantearle el enunciado de la forma siguiente: “Tenía doce cajas de tomates y vendió tres. ¿Cuántas cajas le quedan?”

Cuando resuelve mal un problema porque se pregunta por la cantidad inicial o por la transformación, se le debe proponer preguntándole por la cantidad final.

Ejemplo: en el problema: “¿Cuántas ovejas tenía un pastor, si vendió cuatro y ahora le quedan ocho?. Se pregunta por la cantidad inicial. Si el alumno es capaz de resolverlo correctamente, podemos planteárselo preguntando por la cantidad final, es decir; “Un pastor tiene doce ovejas, si ha vendido cuatro. ¿Cuántas ovejas le quedan?”

Cómo hemos dicho esta forma de solucionar el problema deberá ser en un nivel inicial, ya que el alumno/a ha de ser capaz de solucionarlo con independencia de la ubicación de la pregunta en el enunciado, así como el orden de aparición de los datos, que altere el orden lógico que demanda la situación.

Otras dificultades de deben a:

- Sin comprender el enunciado lleva acabo la ejecución siguiendo el orden en que están expresadas las frases contenidas en el mismo, llegando en ocasiones a dar con la solución, pero sin ser cociente del procedimiento.

Ejemplo: Ha visto resolver un ejercicio similar y ejecuta la resolución del nuevo problema mecánicamente.

- Comprende el enunciado pero se equivoca a la hora de elegir las operaciones.

Ejemplo: Este caso es muy común cuando se realiza un problema distinto, dentro de una serie de problemas análogos, o cuando el alumno no ha realizado un análisis adecuado del enunciado.

- El alumno no sabe cuándo aplicar los conocimientos que posee, por un aprendizaje incorrecto, o generaliza los procedimientos que ya domina.

Ejemplo: Este error es fruto de un aprendizaje matemático en estancos, donde no existe una verdadera conexión entre los distintos contenidos matemáticos y su aplicación a la vida real.

- No interpretar las respuestas resultantes en una situación problemáticas.

Ejemplo: Cuando el resultado le da un dato absurdo y no se lo plantea como error.

- El alumno es capaz de resolver problemas que se le plantean en clase, pero no sabe aplicarlos fuera del marco escolar.

Ejemplo: Resuelve una situación problemática en la que el enunciado da cantidades monetarias, pero luego no es capaz de realizarlo con monedas reales.

- Dificultades relacionadas con el lenguaje: comprensión de los enunciados, deficiente conocimiento lingüístico y/o semántico, diferencias entre el lenguaje ordinario y el matemático.

- El alumno mezcla procedimientos adquiridos previamente para la resolución de problemas donde se han aprendido nuevos procedimientos.

Ejemplo: Es muy habitual que cuando se les enseña la suma llevando, continúen realizando la suma como si no se llevasen nada, o empezar la operaciones de izquierda a derecha tal y como se realiza la lectura.

B.- Dificultades en el campo heurístico

Partiendo de que los heurísticos no se suelen enseñar a los alumnos, sino que éstos se limitan a observar los que aparecen en sus libros o ver los que usan sus profesores, sin que en ninguno de los dos casos se haga una referencia clara a su utilidad y aplicación, la principal dificultad que presentan los alumnos en relación con esta variable es que no suelen aplicarlos de manera flexible en función de las demandas concretas de la situación y tienen dificultad para aplicar los heurísticos que se enseñan en un determinado contexto a las nuevas situaciones.

C.- Dificultades en los procesos metacognitivos

Estos se ponen de manifiesto cuando:

- El alumno no percibe cuáles de los recursos algorítmicos y heurísticos de que dispone son los apropiados para afrontar un determinado problema o ni siquiera es consciente de la posibilidad de usar tales recursos.

Ejemplo de esta situación: cuando se realizan varios problemas de distintos tipos pero de manera separadas, el problema surge cuando se le ofrecen varios mezclados y no sabe cómo actuar.

- El alumno se muestra inflexible a la hora de abandonar un determinado punto de vista que no le está llevando a la solución de un problema y no busca alternativas. O una vez que ha encontrado una vía de solución, no examina otras posibilidades.

Ejemplo de esta situación: problemas en los cuales puede haber varias respuestas, pero el alumno tan solo ha encontrado una, y cuando los compañeros ofrecen otras respuestas, se empeña en preguntar si la suya es la correcta si ver que otras respuestas también son posibles.

- El alumno no pone en juego destrezas de estimación que le permitan comprobar las soluciones a las que llega y, así, poder cambiar sus estrategias en caso de que las soluciones obtenidas por medio de la estimación y por medio del cálculo no coincidan.

Ejemplo de esta situación: este problema viene motivado porque en Primaria, el profesorado, en muy escasas ocasiones, solicita al alumnado que realice estimaciones, salvo, cuando realiza problemas de magnitudes.

- El alumno lee el enunciado de un problema rápidamente y, enseguida, se dispone a hallar la solución, sin una reflexión previa sobre cuál es la demanda del problema, poniendo en práctica algún automatismo adquirido previamente, sin prestar atención a su adecuación al caso concreto.

Ejemplo de esta situación: provocado por un exceso de tareas y un mal aprendizaje de la lectura. Se les enseña a leer, pero no a las técnicas de lectura que mejoran la comprensión y el gusto por la lectura.

- El alumno sabe realizar una operación o problema pero no sabe explicar el procedimiento empleado o, cuando se equivoca, necesita ayuda para comprender por qué su respuesta es errónea.

Ejemplo de esta situación: por una desconexión entre los algoritmos a aplicar y la comprensión del problema es capaz de realizar las operaciones matemáticas, pero manifiesta una falta de aprendizaje significativo para comprender el problema.

A modo de resumen, la mayor parte de los investigadores y especialistas, señalan con carácter general, que las características de los errores cometidos por los alumnos son los siguientes:

1.- Con frecuencia los errores cometidos por los alumnos surgen de manera sorprendente, ya que por lo general se han mantenido ocultos para el profesor durante algún tiempo.

2. - Los errores son a menudo extremadamente persistentes y resistentes a cambiar por sí mismos, debido a que proceden del conocimiento de un concepto o procedimiento. La corrección del error puede necesitar de una reorganización del conocimiento de los alumnos.

3.- Los errores pueden ser o bien sistemáticos o por azar. Los primeros son muchos más frecuentes y son un síntoma que señala hacia un método o comprensión equivocada que el estudiante considera y utiliza como correcto. Los errores por azar reflejan falta de atención o lapsos ocasionales, y tienen relativamente poca importancia.

4. - Los errores ignoran el significado; de este modo, respuestas que son obviamente incorrectas, no se ponen en cuestión. Los alumnos que cometen este tipo de error indican el dato numérico pero obvian su significado.

5.- Son el fruto de un mal desarrollo del plan de actuación frente al problema, que puede estar en alguno de sus pasos: una mala interpretación del lenguaje, una mala comprensión lectora, una utilización incorrecta de los datos, unos razonamientos ilógicos, errores técnicos (cálculo equivocado, datos mal tomados, en la utilización del algoritmo,...) o por la falta de una verificación de la solución.

Antes de finalizar este apartado, a modo de conclusión, señalar que los errores varios factores respecto a los mismos:

- De los errores se aprende y pueden ayudar positivamente en el proceso de aprendizaje.
- Gracias al error, el alumno, es consciente de que su conocimiento es incompleto y solicita la ayuda.

- Indicar que los errores no aparecen por azar sino que son el resultado del trabajo y la investigación, de los conocimientos adquiridos previamente, para la búsqueda de soluciones.
- Hacer notar la necesidad de modificar la predisposición a culpabilizar a los estudiantes de los mismos, reemplazándola por la previsión de errores y su papel dentro del proceso de aprendizaje.
- El número de errores cometidos en un problema puede ser indicativo del grado de complejidad del mismo y nos puede permitir, en ocasiones, subdividirla en apartados o cuestiones parciales más asumibles.
- Todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, debidos a diferentes causas, algunos de los cuales se presentan inevitablemente.

6.- PASOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: COMPRENDER, REPRESENTAR, PLANTEAR, ACTUAR Y REFLEXIONAR.

6.1.- Enunciado y Resolución:

Una vez analizados las dificultades que presenta la resolución de problemas para los alumnos, nuestro plan de intervención constará de dos partes, uno en el cual trataremos sobre la redacción del enunciado del problema y otro sobre la resolución del mismo.

6.1.1.- Redacción del enunciado del problema:

En un primer momento, este apartado, corresponde al docente ya que los problemas que proponemos a nuestros alumnos deberán tener unos requisitos básicos que eviten que el error, en la resolución, venga provocado desde fuera; pero igualmente, con posterioridad, serán los alumnos los que deberán sujetarse a estos requisitos a la hora de plantearlos ellos. Por tanto en la redacción de los problemas tendremos en cuenta:

- El nivel educativo al que van dirigidos, no olvidando que los alumnos de Primaria, son niños y que como tales disfrutan del juego como una de sus actividades preferidas, por ello nuestros problemas (orales y/o escritos) deben tener un altísimo componente lúdico.

- Los contextos de los problemas deben referirse tanto a las experiencias familiares de los estudiantes, a las sociales de su mundo y a otras áreas del curriculum que giren entorno a sus experiencias.

- Utilizaremos palabras del vocabulario del nivel de competencia curricular del alumno y ajustándolo a los centro de interés que vayamos trabajando.

- Muchas de las dificultades que genera el lenguaje en el que está expresado el problema pueden salvarse si el enunciado va acompañado de gráficos y dibujos en los que se destaquen los datos relevantes. Si el problema ya está redactado y carece de esta ayuda, previa a la ejecución del mismo los alumnos deberán representarlo gráficamente, y si el problema incluye el gráfico o dibujo, se analizará tanto el texto como el gráfico a fin de realizar las conexiones mentales necesarias para una buena comprensión.

- En otras ocasiones, cuando el problema lo permita, según la complejidad del mismo así como en los primeros niveles del alumno, pueden realizarse problemas “sin palabras”, mediante dibujos, objetos de manipulación o dramatizaciones.

- Los datos numéricos se presentarán con su nomenclatura escrita, para evitar que el niño busque directamente los datos numéricos y le aplique una operación determinada.

Ejemplo: “Juan tiene cuatro cromos y su padre le da cinco más”.

- En una primera etapa de iniciación a la resolución de problemas, puede plantearse cada dato numérico en un renglón, al objeto de facilitar su comprensión.

- “*Juan tiene cuatro cromos*”
- “*Su padre le da cinco más*”
- “*¿Cuántos cromos tiene ahora?*”

- Evitar redacciones excesivas, concretando al máximo los datos y la pregunta a realizar, pero con cuidado de no ahorrar en exceso y que la comprensión pueda quedar comprometida. Ejemplo:

En lugar de redactar:

“María tiene 8 años, su padre 30 más y su madre 3 menos que el padre. ¿Cuántos tienen entre los tres?”

Redactaríamos:

- “María tiene ocho años.
- Su padre tiene treinta años más.
- Y su madre tres años menos que su padre.
- ¿Cuántos años tienen entre los tres?”

- Utilizar palabras clave que les permitan distinguir claramente qué operación deben realizar.

Ejemplo: “*Juan tiene cuatro cromos y su padre le da cinco más*”.

Cuando estas palabras clave no estén directamente en el enunciado, el maestro/a deberá introducirla, bien durante la lectura o durante la comprensión del texto.

Si lo que pretendemos es mejorar el proceso de resolución del alumno tendremos que evitar los ejercicios rutinarios de mera aplicación y, en su lugar, proponer tareas:

- Desafiantes para el alumno: a veces esto se consigue con un simple cambio en la formulación del problema.
Ejemplo, en lugar de “Comprueba que...”, proponer “Un amigo mío afirma que... ¿es verdad?”.
- Que requieran la aplicación de nuevos procedimientos de solución que surjan de la combinación de aquéllos que ya domina el alumno.
- Ejercitarlos en la duda constante, incluyendo datos que no sean relevantes, situaciones problemáticas absurdas, problemas de pensamiento lateral,...

6.1.2.- Resolución de problemas:

El modelo más clásico, pero aún vigente, de las fases por las que atraviesa la resolución de problemas matemáticos es el descrito por Polya. Para él la resolución de problemas es un proceso que consta de cuatro fases:

- Comprensión del problema
- Planificación
- Ejecución del plan
- Supervisión

Este modelo ha inspirado la gran mayoría de los modelos de resolución de problemas que se han elaborado posteriormente. En la Tabla I puede observarse que, pese a las diferencias terminológicas y de precisión del análisis, los modelos de resolución de problemas que han seguido al de Polya guardan estrechos vínculos.

Nuestro planteamiento de intervención para la resolución de problemas se basa en estas cuatro fases, las cuales hemos adaptado para su uso en los básicos niveles de Primaria. Así que antes de enfrentarnos a un problema planteamos en voz alta, de forma reiterativa, los mismos pasos, los cuales se detallan a continuación y que pueden tener distintas variables, dependiendo del nivel en el que nos encontremos y del número de operaciones implicadas que puede contener. Así pues, nuestros pasos son:

- 1°.- Entender el problema.
- 2°.- Realizar una representación gráfica del problema.
- 3°.- Trazar un plan de actuación.
- 4°.- Realizar la operación que hemos deducido.
- 5°.- Comprobar la respuesta.

TABLA I. MODELOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS				
	1ª fase	2ª fase	3ª fase	4ª fase
Polya (1945)	Comprensión del problema	Planificación	Ejecución del plan	Supervisión
	-Percepción de símbolos escritos	-Determinación de lo que hay	- Formulación de los datos	-Verificación de las respuestas
	-Decodificación de símbolos	que buscar	mediante la notación matemática	
	escritos	-Examen de los datos relevantes	- Ejecución de los cálculos	

	-Formulación del significado	-Análisis de las relaciones entre	matemáticos	
Dunlap y McKnight (1980)	general de las oraciones	los datos	-Decodificación de los resultados	
	-Traducción del mensaje general	-Elección de las operaciones	para que tengan sentido técnico	
	en un mensaje matemático	matemáticas	-Formulación de los resultados	
		-Estimación de las respuestas	técnicos como respuestas a la	
			cuestiones iniciales	
Gagné (1983)	Traducción verbal de las situaciones descritas al lenguaje matemático		Fase central de cálculo	Validación de la solución
	-Lectura del problema	-Hipótesis	-Cálculo	- Verificación
Montague (1988)	-Paráfrasis - Visualización	-Estimación		
	-Enunciado del problema			
Schoenfeld (1979)	-Análisis - Exploración	-Diseño	-Implementación	-Verificación
Uprichard, Phillips & Soriano (1984)	-Lectura	-Estimación	-Cálculo	-Verificación
	-Análisis	-Traducción		
	- Representación	-Planificación	-Monitorización	-Verificación
Mayer (1991)	-Traducción		-Ejecución	
	-Integración			
Garofalo y Lester (1985)	- Orientación	-Organización	-Ejecución	-Verificación
Glass y Holyak (1986)	- Comprensión o representación del problema	-Planificación	-Ejecución del plan	-Evaluación de los resultados
Brandsford y Stein (1984)	- Identificación -Definición	-Exploración	-Actuación	-Observación - Aprendizaje

6.2.- Pasos para la resolución de problemas

1^{er} PASO: “ENTENDER EL PROBLEMA”:

Partimos de la base que hemos seguido los consejos, del apartado “*Redacción del enunciado del problema*” a la hora de redactar o de elegir un problema para que resuelvan nuestros alumnos/as.

En este primer paso hacemos referencia a la identificación y definición del problema. La identificación supone el reconocimiento de la existencia de un problema y de la necesidad de resolverlo. La mayoría de los problemas matemáticos que tienen que resolver los alumnos no exigen ningún esfuerzo de este tipo, puesto que el problema ya se les ha presenta como tal.

La definición del problema consiste en la decodificación de los símbolos escritos y en la conversión del enunciado matemático en una representación mental.

Para lograr la correcta comprensión del problema, deben ser capaces de identificar los datos relevantes de los que no lo son, para lo cual podemos utilizar las siguientes estrategias:

1.- Realizamos la lectura del problema, esta debe de realizarse de forma progresiva:

- Lectura en voz alta por parte de uno o varios alumnos, primero del planteamiento y luego de la pregunta.
- La lectura irá acompañada de preguntas del maestro en busca de la comprensión del mismo, estas preguntas nunca deben contener en sí la respuesta. Ejemplo. “*de que va*”, “*que nos cuenta*”, “*de qué cosas habla*” “*de quién habla*”, “*qué les ha pasado*”...
- En tanto no exista una comprensión del texto, se repetirá sucesivamente la lectura, por otros alumnos, de un grupo determinado de ellos o del grupo entero, al objeto de que la dispersión de pensamiento se vayan concentrando en su comprensión.
- Después de leerlo con pausa y reflexionando, es importante intentar responder a las siguientes preguntas:
 - *¿Entiendes todo lo que se dice?*
 - *¿Puedes replantear el problema en tus propias palabras?*
 - *¿Distingues cuáles son los datos?*
 - *¿Sabes a qué quieres llegar?*
 - *¿Tenemos toda la información que necesitamos?*
 - *¿Hay información que no necesitemos?*

- *¿Es este problema similar a algún otro que hayas resuelto antes?*

2.- Subrayaremos con lápiz rojo los datos del problema y en azul la pregunta, al objeto de separar los datos de las preguntas.

3.- El alumno explicará, con sus propias palabras, el enunciado a un compañero: señalando cuál es la pregunta del problema, indicando los datos que hacen falta para resolver el problema y separando los datos relevantes de los que no lo son.

4.- Cuando el problema contenga más de una operación, es necesario que lo separe en cada una de sus partes, para resolver cada una de ellas en relación con las restantes partes y con el enunciado total de problema.

5.- Otras tácticas que podemos realizar son:

- Escribir de modo esquemático el contenido de cada frase del enunciado.
- Reproducir el texto utilizando frases cortas y sencillas.
- Decir en voz alta el enunciado, recalcando las palabras clave.
- Asegurarnos que conoce lo que queremos encontrar, los datos y las relaciones entre los datos.
- Asegurarnos que comprende de donde partimos y qué queremos, así como las operaciones posibles para llegar del estado inicial al e final.
- Si la representación de un problema no conduce a la solución, trata de volver a formular el problema.

En resumen, buscamos no solo la capacidad de análisis de la información que aparece en el enunciado, sino también la “autoevaluación” que hace de su conocimiento de la tarea, del nivel de dificultad y de las posibilidades de éxito.

2º PASO: “REALIZAR UNA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL PROBLEMA “:

Este paso que en los modelos de resolución de problemas se encuentra englobado dentro de otras fases, nosotros lo hemos sacado y otorgado más relevancia, debido a que en los niveles educativos de Infantil y primeros Ciclos de Primaria, la representación gráfica, en el trabajo diario se nos ha presentado, como un elemento clave, tanto para la comprensión del problema, como para la introduciendo en la resolución de problemas y en aquellos casos que la redacción del mismo les resulte especialmente difícil.

La representación mediante diagramas, gráficos o dibujos, no es la única estrategia de este tipo que podemos usar, también es aconsejable que a los niños se les planteen situaciones problemáticas teatralizadas, con cuentos de forma oral y manipulando objetos para que ellos los puedan representar de distintas formas.

Un recurso didáctico que da muy buenos resultados es la utilización de programas informáticos que a través del juego les planteen situaciones problemáticas. Este recurso tiene la ventaja, aparte de que el recurso en sí ya es motivador, que presenta de forma gráfica y en movimiento los problemas, y es este último aspecto, “el movimiento”, el mejor recurso que podemos usar, ya que ven directamente cómo se desarrolla el planteamiento del problema.

Una vez superada esta fase es aconsejable continuar mediante la representación gráfica de los datos del problema y en aquellos casos que la representación gráfica venga impresa en el libro de texto, pararnos a analizar los dibujos.

3^{er} PASO: “TRAZAR UN PLAN DE ACTUACIÓN”:

Esta fase consiste en la planificación de la solución. Se trata ahora de diseñar el esquema de actuación a seguir, lo que supone identificar las metas y las posibles submetas cuando tratamos de problemas en los que debemos realizar operaciones intermedias, examinar las diversas estrategias generales que podemos aplicar y elegir las acciones que se llevarán a cabo.

En este punto vamos a trazar un plan de actuación. Para ello podemos utilizar diferentes estrategias.

- Utilizar palabras clave que mediante la asociación directa con la operación (juntar/unir con sumar, quitar/separar con restar) se les irán familiarizando poco a poco y les permitirá reconocer la operación a realizar en situaciones similares. Ejemplo: “¿Qué tenemos que hacer junta o quitar? (unir/separar)”
- Si se duda entre posibles operaciones, efectuamos una estimación y mediante el ensayo y error llevamos a cabo todas las posibilidades y vemos que solución se ajusta al resultado más lógico y esperado.
- Recordar un problema conocido de estructura análoga al que tengamos y tratar de resolverlo.
- Resolver un problema similar más simple o equivalente, simplemente cambiando el tema del que trate el problema.
- Si la numeración de los datos es muy alta, resolverlo con números más sencillos y utilizar el modelo empleado para resolver el problema original.

- Identificar las posibles submetas que pueda englobar un problema de varias operaciones. Esto supone la división del problema en partes, cada una de las cuales es imprescindible para llegar a la solución final:
 - Si es el maestro el que identifica las distintas submetas, tendrá que delimitar cada una de las partes del problema y colocar en cada parte los datos correspondientes, solicitando del alumno que ponga en cada apartado la solución correspondiente, haciendo comprender al alumno que la solución hallada es el dato que necesitará para resolver la siguiente submeta.
 - Si es el alumno el que ha de identificar cada una de las submetas, tendrá que tener en cuenta qué es lo que ha logrado con cada una de las operaciones que realiza para ir obteniendo los datos que requiere para alcanzar la pregunta final del problema.
 - Si el texto tuviera más datos de los necesarios para la resolución del problema, anotar sólo los que hagan falta.
- Por su parte el profesor deberá plantear al alumno preguntas al objeto de ayudarle en su camino hacia encontrar la solución, como por ejemplo:
 - ¿Cuál es el problema?
 - ¿Qué estás haciendo?
 - ¿Por qué estás haciendo esto?
 - ¿Qué estamos tratando de hacer aquí?
 - ¿Cómo te ayuda lo que estás haciendo para alcanzar la solución?
 - ¿Qué información nos dan?

4^{er} PASO: “REALIZAR LA OPERACIÓN QUE HEMOS DEDUCIDO”:

Una vez configurado el plan, el paso siguiente es hacer que el alumno lleve a cabo las estrategias que eligió previamente. Para ello, conviene que el alumno se tome el tiempo necesario para resolver el problema. En caso de dificultad debe solicitar ayuda para que el maestro le haga sugerencias que le permitan avanzar en la resolución del problema.

Igualmente aquí el papel de maestro será de guía mediante preguntas del tipo: ¿estamos siguiendo los pasos que decidimos?, ¿cuál es la operación matemática que debemos elegir?, ¿necesitamos un nuevo plan?,...

En esta fase uno de los mayores problemas con las que se encuentra el alumno es la traducción simbólica, en términos numéricos, de las ideas lógicas que ya ha realizado. Son capaces de resolverlo mentalmente, pero no con los algoritmos matemáticos necesarios. En este caso habrá que reforzar el significado de los distintos significados de las operaciones aritméticas y los verbos de acción y/o palabras clave que nos llevan a ellas.

Muchas veces en esta etapa de la resolución de problemas se pueden producir atascos, en los cuales no se debe tener miedo a volver a empezar desde el principio, o dejar para otro momento, suele suceder que un comienzo fresco o una nueva estrategia nos lleve al éxito.

5^{er} PASO: “COMPROBAR LA RESPUESTA “:

Esta fase es la de verificación, de mirar hacia atrás, recorrer los pasos que se han seguido para la resolución del problema con objeto de detectar posibles errores o deficiencias. Sobre todo si se ha cometido un error debemos comprobar las decisiones tomadas (análisis de la información, ejecución de los cálculos, etc.) y de los resultados del plan ejecutado (exactitud de la respuesta, correspondencia con el enunciado que la originó, etc).

Es muy común por parte del alumnado, que una vez realizadas las operaciones:

- Den por terminado el problema sin que exista una respuesta escrita a la pregunta que planteaba el problema.
- Dar una respuesta escrita numérica pero sin acompañarla de la aclaración que del significado al dato.
- No realicen una reflexión de los resultados obtenidos que refuercen el proceso realizado.
- No se inmutan ante respuestas absurdas, ya que no realizan una correspondencia entre la solución alcanzada y el enunciado del problema que le permita comprobar el dato obtenido. (Ejemplo: Que el resultado del problema de que la edad de Manolito sea de 120 años)

El maestro de forma dirigida deberá introducir al alumnado, en un proceso en el que se planteen las siguientes preguntas:

- ¿El resultado obtenido tiene lógica?
- ¿El dato responde a la pregunta planteada?
- ¿Utiliza todos los datos importantes?
- ¿Cuadra con las estimaciones y predicciones razonables realizadas?
- ¿Es posible encontrar una solución más sencilla?
- ¿Se puede resolver el problema de un modo diferente?
- ¿Es posible utilizar la estrategia empleada para resolver otros problemas?

El principal problema del entrenamiento específico en heurísticos está en que los alumnos tienen problemas para aplicar los heurísticos aprendidos a nuevos problemas. Sin embargo con la práctica los alumnos irán interiorizando estas estrategias hasta llegar a plantearlas de manera espontánea.

Otra manera de mejorar los procesos de autocontrol del alumno es enseñarle a realizar estimaciones de los problemas que resuelve para compararlos con los resultados que obtiene y, de esta forma, modificar o no el proceso de resolución seguido. Así mismo, cuando las estimaciones no cuadre, les plantearemos preguntas del tipo: ¿qué fue lo que funcionó?, ¿qué podríamos hacer de manera distinta la próxima vez?,...

7.- TIPOS Y SECUENCIACIÓN DE PROBLEMAS EN PRIMARIA

La enseñanza-aprendizaje de los problemas matemáticos debe contemplar todo tipo de problemas, ya que variedad que se utilizan en el aula aportados por los libros de texto y los cuadernillos de trabajo, no suele ser completo ni variado, como vemos en el análisis de realizaremos de estos materiales.

Por ello nosotros partimos de la idea de que si trabajamos todos los tipos de problemas, graduándolos en conocimientos y conceptos, y aplicamos los pasos que ya hemos visto cada vez que nos enfrentemos a uno, deberemos mejorar el rendimiento de los alumnos en la resolución de los problemas matemáticos.

En el apartado 4 sobre el análisis de los tipos de problemas en Primaria, de estructura aditiva y multiplicativa, realizábamos una pormenorizada clasificación de los tipos de problemas existentes y de su graduación a lo largo la misma. A continuación completamos dicha graduación con otros tipos de problemas que completarían la variedad necesaria de la cual hemos hablado.

7.1.- Realización de variedad de problemas

Cómo indicamos la heurística en sí no garantizan que los alumnos aprendan a resolver problemas, pero su ejercitación en la mayor variedad posible, sí aumenta sus probabilidades de éxito ante nuevos problemas, así que además de los tradicionales problemas también pueden realizar ejercicios del tipo:

PROPUESTAS	EJEMPLOS
Descubrir el dato que falta en un problema.	“Si diez pájaros están en un árbol. ¿Cuántos quedarán?”.
Reconocer datos superfluos o innecesarios en la redacción del problema.	“Antonio tiene setenta y cinco céntimos, su madre le da tres caramelos. Si gasta cincuenta céntimos en una libreta. ¿Cuántos céntimos le quedan?”
Enunciados de problemas, donde falten datos o estén mal formulados, a fin de que los alumnos se descubran el error.	“Rocío tiene tres manzanas en la mano derechas y otras pocas en la izquierda. ¿Cuántas manzanas tiene en total?”.
Enunciar problemas, donde se planteen situaciones imposibles.	“Si tengo veinticinco kilos de patatas, y gasto veinticuatro euros. ¿Cuántos kilos de patatas me quedan?”.

Buscar los datos necesarios en una lista o gráfico.	
Proponer problemas divergentes que cultiven la creatividad.	“Si tienes X euros. ¿Qué podrías hacer con ellos?”
Problemas que permitan combinar distintos datos.	“Si tenemos varios objetos cada uno con su precio y tienes treinta y seis euros. ¿Qué puede comprar, para que no te sobre ni te falte dinero?”
Plantear falsas relaciones.	“Si un niño tarda veinte minutos en llegar a la escuela. ¿Cuánto tardarán cuatro niños?”
Problemas sin números para que el niño explique cómo lo resolvería.	“Si tú supieras lo que vale un lápiz. ¿Cómo harías para saber lo que valen varios?”
Resolver problemas por estimación.	“¿Cuántas canicas tendremos entre Luís, Manolo y Pedro si cada uno tiene 9, 11 y 5?”
Plantear situaciones problemáticas de las que sean posibles formular varias preguntas.	“El equipo de X ganó doce partidos de los treinta jugados y el equipo Y ganó solo ocho” ¿?, ¿?, ¿?,...
Resolver problemas que admitan más de una solución.	“
Problema de conflicto, donde aparentemente se dice una cosa, pero realmente es la contraria.	“Si un pastor que tiene quince ovejas, se le mueren todas menos nueve. ¿Cuántas ovejas le quedan?”
Problemas de lógica	“Sabiedo que todos los animales que tengo en casa son perros menos dos, todos son gatos menos dos y que todos son loros menos dos. ¿Cuántos animales tengo en casa?”
Problemas de pensamiento lateral. En este tipo de problemas se trata de encontrar soluciones imaginativas, distintas, que se apartan del clásico enfoque de cualquier problema cotidiano.	“Una persona que dispone de una barca para atravesar un río desde una orilla a la otra, tiene que pasar un lobo, una cabra y un arbusto. El problema es que en cada viaje solo puede pasar a uno de los tres y no puede dejar solos, en ninguna de las dos orillas, al lobo y a la cabra porque el lobo la mataría, y tampoco puede dejar solos a la cabra y al arbusto porque la cabra se lo comería. ¿Cómo pasará a los tres a la otra orilla?”

7.2.- Cómo plantear la creación de problemas propios:

Una vez que los alumnos/as vaya alcanzando destrezas en la técnica de resolución de problemas, se les debe pedir que creen, redacten y realicen una variedad más amplia de problemas, con lo cual mejoramos la experiencia y las posibilidades de éxito cuando se enfrente a nuevos retos problemáticos.

Para iniciar en la redacción de nuevos problemas matemáticos debemos tener en cuenta las siguientes acciones básicas:

- El tema: elegir el asunto del problema.
- La estructura: decidir si los problemas llevarán los datos directos, inversos o superfluos, de una o varias operaciones y si tendrá información gráfica o no.
- La situación inicial: decidir cómo se presentarán los datos conocidos.
- La pregunta: expresar, partiendo de los datos, qué quiero saber, y en función de la estructura, las preguntas que realizaremos.
- La resolución del problema: cómo llego de lo conocido a lo desconocido.

Para Polya, la forma más fácil de crear nuevos problemas es mediante analogías, partiendo de problemas conocidos. Debemos tener en cuenta que la analogía, para crear nuevos problemas, deberá hacer referencia a la similitud en el planteamiento, no a solución. Entre estos recursos podemos usar, principalmente:

- Cambiar los papeles que juegan los datos y la incógnita.
- Generalizar, particularizar, y emplear analogías.

También podremos generar nuevo problemas a partir de:

PROPUESTA	EJEMPLO
Dadas preguntas redactar los enunciados de las mismas.	<i>“¿Cuántos lápices compré?”</i>
Dada una o varias operaciones, inventar el problema.	<i>“Inventa un problema en que el resultado sea una suma de resultado 8”</i>
A partir de datos lógicos, plantear la pregunta y resolver el problema	<i>“Juan tiene cuatro peces y compra dos más. ¿? ”.</i>
Dadas unas preguntas buscar los datos que nos hagan falta para resolver un problema.	<i>“¿Cuántos magdalenas nos habremos comido si quedan cinco?”.</i>
Proponer problemas donde, una vez resuelto, puedan obtenerse nuevos problemas aplicando operaciones aritméticas inversas.	<i>“Juan tiene cinco cromos y le dan siete más. ¿Cuántos tiene ahora”. Inversa “Si Juan tiene doce cromos y regala 5. ¿Cuántos tiene ahora”.</i>
A partir de un enunciado simple, aumentar el enunciado con más datos relacionados.	<i>“Juan tiene una colección de catorce cromos y su abuelo le compra seis más. ¿Cuántos tendrá ahora?”. Añadiríamos: “su hermano le da los doce suyos”, “les gana a sus amigos nueve”,...</i>
De un enunciado con una sola pregunta, pero con datos suficientes, aumentar en el número de preguntas.	<i>“En un partido de baloncesto Juan ha encestado ocho veces, Luis doce veces y Manuel quince veces. ¿Cuántas canasta hicieron?”. Añadiríamos: “¿Cuántos puntos lograron?, ¿Cuántas canastas</i>

	más encestó Manuel que Juan?,...
A partir de un problema resuelto, realizar otro igual con más datos.	
Inventar problemas similares a los dados.	
Inventar problemas sacando datos de un texto, gráfico o situación.	

8.- RECURSOS DIDÁCTICOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

8.1.- Consideraciones a tener en cuenta:

Muchos de nosotros hemos vivido, como alumnos/as, la enseñanza de las matemáticas cuando el lápiz, el cuaderno, la tiza y la pizarra eran los únicos elementos que acompañaban la explicación del maestro/a; explicación que se limitaba, en muchos casos, a dar unos enunciados que se debían memorizar, que nadie podía discutir, ni siquiera comentar, y que eran el prelude de una serie de ejercicios que había que resolver.

Desde entonces han cambiado muchas cosas: libros de texto agradables y bien ilustrados, ordenadores, videos, recursos manipulables, se puede comentar y preguntar, con mucha más libertad, al maestro/a, pero debemos plantearnos hasta qué punto hemos conseguido cambiar la idea de fondo y si realmente admitimos que para aprender hay que reelaborar los conocimientos en un proceso en el que es preciso tantear soluciones, comentar ideas y razonar resultados, y en el que cada cual participa a la vez de forma individual y como miembro de una colectividad.

La realidad, en muchísimas aulas sigue siendo que la forma en que se enseña la resolución de problemas no ha cambiado mucho de lo descrito anteriormente, manteniéndose la misma metodología que a través de generaciones de alumnos/as han dado los mismos resultados negativos.

Para cambiar la realidad actual, aparte de lo que ya hemos expuesto hasta ahora, debemos tener en consideración otros aspectos, en cuanto la resolución de problemas:

- Los problemas que se plantean al alumno/a deben tener una implicación personal en la propuesta, ya sea porque corresponda a alguna situación de la vida diaria o a algunas de sus aficiones. Cuando se consigue, el interés y la significatividad de la propuesta aumentan notablemente y se obtienen mejores resultados:
 - Que el alumno tenga la oportunidad de definir una situación como problemática, sin atribuírsela directamente como tal.
 - Que el problema sea práctico, de manera que le vea un sentido lógico.
 - Que el problema admita más de una solución que permita una mayor participación en la clase.

- Que el problema admita más de un método para alcanzar la solución.
 - Proponerles situaciones en las que tengan un papel activo, es decir, plantearles algo que tengan que hacer, por ejemplo: distribuir cosas entre..., buscar todos los que tengan..., construir una figura que sea...
- El maestro debe transmitir al alumno, a través de sus palabras y metodología, confianza en su capacidad para resolver problemas, así como comunicarles la dificultad de la tarea que hay que realizar y el grado de esfuerzo que exige, porque el alumno tiende a experimentar una gran satisfacción cuando es capaz de resolver un problema desafiante y, en caso de fracaso, ante una tarea difícil que demanda una gran cantidad de esfuerzo, el alumno podrá reconocer que el error no es resultado de su falta de competencia. Esta última atribución le animará a volverlo a intentar.
 - No utilizar los problemas de los libros de texto y cuadernillos de apoyo, sin un análisis previo de si se adaptan o no a las pautas expuestas y del grado de dificultad que suponen. Por otro lado, como se ha descrito, hay que alternar diversas formas de plantear un problema para que los alumnos/as no se acostumbren a una sola manera de identificar los datos que se les suministran y los datos que se les piden.
 - Es conveniente trabajar la resolución de problemas en pequeños grupos donde el alumno se vea obligado a ser claro y a justificar su proceso de resolución. Estos trabajos pueden favorecer el intercambio de ideas en torno a la resolución de problemas y que el alumno tome conciencia de que un mismo problema puede abordarse a través de distintos procedimientos, todos ellos válidos, igualmente este método de trabajo y el compartir las dificultades puede contribuir a que éstas se vivan con menos carga de angustia.
 - Hay que cambiar los criterios de evaluación de la resolución de problemas del alumno/a, no sólo la obtención de una respuesta correcta es apreciable, sino que se deben valorar otros aspectos de la resolución: el conocimiento informal del alumno, el uso que hace de procedimientos y estrategias personales para adaptar la instrucción a esos conocimientos previos, la planificación, la identificación y la justificación de los métodos de solución empleados. Es curioso ver cómo, en ocasiones, un simple error de cálculo da al traste con un esquema de trabajo correcto en todos sus aspectos, y es valorado negativamente.
 - Se deben emplear recursos didácticos variados en la resolución de problemas. Entre ellos, programas informáticos e internet.
 - No hay que olvidar tampoco la importancia de la mecanización. Las matemáticas hay que comprenderlas, pero también hay que practicarlas con el fin de alcanzar un dominio que permita utilizarlas economizando esfuerzos; por lo tanto, deben proponerse

también ejercicios encaminados a conseguir una automatización de determinadas habilidades.

- La utilización de creatividad en el aula que nos permitirá orientar a los alumnos a descubrir problemas, con estrategias más específicas como:
 - Dramatizar en clase técnicas de compra y venta que nos ayuden a dominarlas.
 - Matematizar situaciones de la vida cotidiana.
 - Utilizar e inventar juegos matemáticos: rompecabezas, numerogramas, criptogramas, jeroglíficos, sudokus,...
 - Interpretar y elaborar planos, sobre todo planos que les sean significativos. Ejemplo: Esconder un mensaje secreto en la clase, patio,... y mediante un plano con pistas deberán encontrarlo.
 - Hacer traducciones del lenguaje ordinario al lenguaje matemático.
 - Reproducir a escalas edificios, estatuas, etc.
 - Utilizar cuentos para introducir contenidos o plantear situaciones problemáticas.

8.2.- Posibles Recursos Didácticos

8.2.1.- Los cuentos como herramientas en la resolución de problemas.

En Infantil y Primer Ciclo de Primaria una herramienta muy útil para mantener la atención de los alumnos/as, es hacer uso de los cuentos orales para introducirlos en contenidos nuevos o plantear situaciones problemáticas.

Para ello deberemos tener en cuenta:

- Convertir el problema en un relato de cuento a la imagen de la estructura de los típicos cuentos infantiles.
- La acción ha de transcurrir de modo ininterrumpido.
- Las frases y palabras reiterativas son totalmente necesarias.
- Representar dramáticamente la acción, de forma visual a la vez que auditiva.
- Con sencillez y claridad, sin dar importancia a lo que se sabe.
- Con tranquilidad, sin correr.
- El niño debe disfrutar con la historia.
- Para captar su atención se puede relacionar la historia con su vida cotidiana: *“Había una vez un(a) niño(a), que se llamaba (nombre del niño(a)) como tú, y...”*
- Despertar expectación: hay que meterse dentro del problema: modular la voz y adaptar los gestos a la historia es tan importante o más que lo que se cuenta. Hay que introducir pausas en los momentos cumbre para incrementar el interés.
- No olvidar el ritmo: Es preciso que pasen cosas llamativas y con rapidez.

- En toda la narración se debe colocar al alumno en situación de participar, sin aniquilar el placer de ir descubriendo por sí mismo la continuación del cuento, participando en el mediante preguntas dirigidas por el maestro.

8.2.2.- Las TIC como herramientas en la resolución de problemas.

Diversas investigaciones están demostrando que los estudiantes pueden aprender más matemáticas y de manera más profunda con el uso de una tecnología apropiada como recursos didáctico.

En su utilización debemos tener, muy en cuenta, que el estudio de las matemáticas requiere enfrentar al alumno a problemas cuya solución sean los conocimientos matemáticos pretendidos y no convertir el uso de estos recursos didácticos en un fin en sí mismo. Hay que tener en cuenta que la tecnología no debe usarse como sustituto de intuiciones y comprensiones básicas; al contrario, deberá enfocarse de manera más amplia y responsable, con el fin de enriquecer el aprendizaje matemático de los estudiantes.

Un mal uso, de estos recursos, pueden suponer:

- Dificultades de aprendizaje del software. Debemos partir de la base que tenemos que usar recursos fácilmente manipulables que no añadan una complejidad innecesaria a la actividad matemática, esto puede ocasionar que el tiempo, ya limitado, para la enseñanza de la matemática se invierta en el aprendizaje de la tecnología.

Debemos rechazar, en Infantil y Primaria, todo aquel software que para su utilización, el alumno, necesite realizar un aprendizaje mayor que la simple necesidad de manejar el ratón.

- La idea que los alumnos/as tienen del ordenador, de los programas informáticos y de internet, posee un marcado componente lúdico, lo cual puede interferir, provocando situaciones de entusiasmo y nerviosismo, en el correcto aprovechamiento de los contenidos para los cuales hemos usado este recurso.
- Es importante recalcar que el uso de estas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas es siempre un medio para un fin que no debe comprometer toda la atención de los alumnos, desplazando la propia reflexión matemática.

Entre las ventajas que supones podemos nombrar:

- Los programas informáticos e internet son un valioso instrumento para atraer la atención y el interés del alumno.
- Son una inestimable ayuda al alumno/a para la representación mental.

- Proporcionan imágenes visuales que recuerdan nociones matemáticas, facilitan la organización, el análisis de los datos, la representación gráfica y el cálculo de manera eficiente y precisa.
- Acortan el tiempo dedicado al cálculo permitiendo dedicar más tiempo a tareas interpretativas y reflexivas.
- Acercan, facilitan y ayudan en el aprendizaje matemático, debido a la existencia y actualización, cada vez mayor, de programas informáticos y páginas web.
- Las páginas web tienen la ventaja de:
 - Poder contactar con otros centros e intercambiar información.
 - Disponer una inmensa base de datos para trabajar en clase.
 - Utilizar programas a distancia (en línea) que no dependen de la potencia de nuestros ordenadores ni de su compatibilidad, funcionando con independencia del sistema operativo instalado en nuestro equipo.
 - Tener que gastar una considerable cantidad para el pago de licencias de uso.

Respecto a los programas y web que podemos usar, es obvio notar que la cantidad es innumerable, por lo que nos centraremos en aquellas que nos permitan un uso directo en los niveles en los que hemos centrado este trabajo y tengan un importante carácter didáctico. Por ello vamos dejar de lado los lenguajes de programación, los paquetes profesionales, el software de uso general y los tutoriales.

En el grupo de los programas informáticos mencionaremos:

- Los denominados de “propósito general”, como el Paint con el cual podemos trabajar contenidos geométricos sin necesidad de aprender las complicadas funciones y menús de programas gráficos.
- El programa JClic está formado por un conjunto de aplicaciones libres que permiten crear diversos tipos de actividades educativas multimedia, creada con el objetivo de dar difusión y apoyo al uso de estos recursos, y ofrecer un espacio de cooperación abierto a la participación de todos los educadores/se que quieran compartir los materiales didácticos creados con el programa. Podemos descargar gratuitamente el programa, guías de usuario, tutoriales, cursos de creación de actividades y recursos ya elaborados en la página: <http://clic.edu365.cat/es>

De entre los existentes entresacamos una muestra:

- “Resolvemos problemas en el ciclo inicial” Emilia Alcaraz y Martín Martínez CEIP Ferran Agulló. Molins de Rei (Baix Llobregat). Conjunto de 50 problemas matemáticos simples basados en operaciones de sumar y restar, dirigidos al ciclo inicial de pri-

maria. Las actividades utilizan gráficos para ayudar a entender la pregunta planteada en cada problema. Algunos de estos gráficos son a 256 colores.

Enlace: <http://clic.xtec.net/projects/ipsumes/jclic/ipsumes.jclic.zip>

- “Iniciación a problemas - 2º ciclo” Ramiro Garijo Tarancón “CRA Pinares Altos Vinuesa (Soria)”. Paquete de actividades para 2º ciclo de Primaria de problemas de matemáticas. El paquete se divide en cuatro sesiones dónde hay diferentes problemas en los que el alumno debe elegir la solución o el procedimiento correcto. Adaptado para discapacidad visual baja visión.

Enlace: <http://clic.xtec.net/projects/probledv/jclic/probledv.jclic.zip>

- “Problemas variados (ciclo superior)”. Enric Peiris Poch CEIP Mn. Baldiri Rexach Banyoles (Pla de l'Estany). Paquete de actividades de Clic organizado en cuatro secciones de problemas. Los problemas son variados aunque la respuesta siempre ha de ser escrita. Destinado a alumnos de ciclo superior de educación primaria.

Enlace: <http://clic.xtec.net/projects/probcast/jclic/probcast.jclic.zip>

- “Cálculo mental del 1 al 100 con resolución de problemas”. Nancy Michol Silva Rudillo. Colegio Francisco Arriarán Sociedad de Instrucción Primaria. Santiago de Chile (Xile) . El paquete de actividades está dirigido a niños de 6 a 12 años, se trata del cálculo mental del 1 al 100, apuntando a las decenas y a todas las posibilidades de formar cada decena. Aunque del 1 al 100 se trabaja en niños de primer ciclo da muy buenos resultados para repasar con niños de un nivel superior.

Enlace: <http://clic.xtec.net/projects/mental/jclic/mental.jclic.zip>

- De entre los que requieren un pago por licencia de uso, vamos a hablar solamente de la colección "VIAJA CON PIPO EN EL TIEMPO CON LAS MATEMÁTICAS" por su adaptación a los contenidos oficiales graduados por niveles, la existencia de guías didácticas y la posibilidad de realizar actividades en línea a través de su página <http://www.pipoclub.com>

Principalmente la mejor característica del programa, desde el punto de vista de la resolución de problemas, es la posibilidad de que mediante animaciones los alumnos/as puedan ver gráficamente las transformaciones que tienen lugar entre los datos hasta llegar a la solución del problema.

8.2.3.- El vídeo

Podemos repetir, para el uso del vídeo, las mismas dificultades que hemos indicado para el uso del ordenador e internet, pero además indicaremos respecto al vídeo, que si bien permite tratar los contenidos de una manera muy diferente a como lo hace un libro de texto puede resultar una actividad muy pasiva para los alumnos. Algunos consejos generales que conviene tener en cuenta son:

- 1) Antes de llevarlo al aula, hay que determinar qué parte se va a usar, por qué y para qué. Se necesita verlo completo para determinar qué segmentos son adecuados para los alumnos.
- 2) No hay que caer en la tentación de querer proyectar todo el video en una sola sesión. Los chicos no tienen la misma retentiva que los adultos, o la que desarrollan cuando van al cine. No hay que sustituir la clase con un video, sino que hay que aprovechar partes del mismo para enriquecer la enseñanza.
- 3) Hay que diseñar actividades que permitan a los estudiantes estar atentos antes, durante y después de ver el segmento del video.
- 4) No es conveniente apagar las luces.

8.2.4.- La calculadora

No vamos a entrar a analizar los distintos puntos de vista a favor o en contra del uso de la calculadora en Primaria. Hace ya años que el papel didáctico de la calculadora no se cuestiona, debido a que se considera un potente instrumento de cálculo cuya utilidad para mejorar el aprendizaje de las Matemáticas es tan evidente que resulta frívolo y superficial ponerla en duda.

Si bien en el apartado dedicado a las TIC no hemos hecho un análisis sobre lo que dice la nueva normativa del Curriculum de Primaria, ya que está ampliamente aceptado su ventajas en la docencia; en el caso de las calculadoras, debido a la mala fama, que entre los docentes, su uso puede tener en nuestros alumnos, nos detendremos para conocer qué nos dice de ella.

El uso de la calculadora nos la encontramos presente en la LOE de Primaria dentro del bloque de Números y operaciones del 2º y 3º Ciclo, como contenido *“Utilización de la calculadora en la resolución de problemas de la vida cotidiana, decidiendo sobre la conveniencia de usarla en función de la complejidad de los cálculos.”* y *“Utilización de la calculadora en la resolución de problemas, decidiendo sobre la conveniencia de usarla en función de la complejidad de los cálculos.”* respectivamente

Dentro de la Orden de 10 de agosto de 2007, que desarrolla el currículo de la Educación Primaria en Andalucía, nos encontramos una amplia referencia a ellas que abreviaremos en:

- *“Los alumnos y alumnas deben profundizar gradualmente en el conocimiento, manejo y aprovechamiento didáctico de alguna aplicación básica de Geometría Dinámica, familiarizarse con el uso racional de la calculadora y utilizar simuladores y recursos interactivos como elementos habituales de sus aprendizajes”.*

- *“Más concretamente, en el área de Matemáticas, las calculadoras,... deben suponer, no sólo un apoyo para la realización de cálculos, sino mucho más que eso, deben convertirse en herramientas para la construcción del pensamiento matemático y facilitar la comprensión del significado de los contenidos, ya que permiten liberar de una parte considerable de carga algorítmica.”*
- *“Es conveniente que los alumnos y alumnas manejen con soltura las operaciones básicas con los diferentes tipos de números, tanto a través de algoritmos de lápiz y papel como con la calculador,... lo que facilitará el control sobre los resultados y sobre los posibles errores en la resolución de problemas.”*
- *“Más concretamente, en la materia de Matemáticas, las calculadoras... las TIC han de contribuir a un cambio sustancial de qué enseñar, poniendo el énfasis en los significados, en los razonamientos y en la comunicación de los procesos seguidos, dando progresivamente menos peso a los algoritmos rutinarios.”*
- *“Deben adquirir destrezas en el uso de patrones para analizar fenómenos y relaciones en problemas de la vida real, empleando ordenadores o calculadoras gráficas para obtener la representación gráfica, interpretar con claridad las situaciones y realizar cálculos más complicados.”*
- *“Al igual que para otros contenidos del área es recomendable la utilización del ordenador y de las calculadoras,... para manipular, analizar y representar conjuntos de datos.”*

Es incuestionable que los alumnos/as deben desarrollar sus habilidades de cálculo con independencia de las máquinas y que es muy importante que hayan interiorizado y automatizado los algoritmos de las distintas operaciones. En este sentido, la calculadora no debe sustituir ninguna de las capacidades de cálculo y razonamiento del alumnado. Pero, esto no significa que la calculadora sea negativa. Lo será, si su uso no es el adecuado, pero qué sentido tiene adiestrar en destrezas de sumas interminables o divisiones larguísimas, si todo lo que va más allá del cálculo mental (raíces cuadradas, operaciones con “super decimales”, logaritmos,...) no lo realiza absolutamente nadie en la vida ordinaria.

La calculadora en la resolución de problemas, y en el aprendizaje de las matemáticas en general, supone:

- Un potente instrumento de cálculo que permite ahorrar tiempos que pueden ser utilizados en procesos de investigación, de planteamiento de conjeturas, etc.
- El tiempo ahorrado se puede dedicar al desarrollo de capacidades generales de razonamiento matemático y a la generalización de conceptos basados en la investigación de pautas y regularidades numéricas.

- Es neutral y el alumno/a no percibe reprobación ni crítica ante las respuestas equivocadas.
- Posibilita que se desarrollen y potencien habilidades generales tan importantes como la estimación, el cálculo mental, la búsqueda de regularidades, la creatividad, la visión espacial y el dominio de las operaciones básicas, *entre* otras.
- La calculadora permite comprobar con rapidez la corrección de los cálculos hechos a mano en la resolución de problemas, y puede ser muy útil para plantear nuevas situaciones problemáticas que realizar cálculos tediosos.
- La posibilidad de verificar los cálculos rápidamente, permite pedir ayuda inmediata a las respuestas erróneas y a detectar posibles errores.
- Por otro lado, es un buen punto de partida para motivar el cálculo en general, pero resulta especialmente valiosa para afianzar el cálculo mental y estimativo, a través de la predicción e interpretación de los resultados de la máquina.
- Otra ventaja de la calculadora es que es muy motivadora, ya que aporta un componente lúdico que capta la atención y despierta el interés del alumnado.

Para usar la calculadora en clase debemos, tener en cuenta una serie de tres consejos básicos:

- No se trata en Primaria de enseñar el uso de complicados calculadores, sino de utilizar las de cuatro operaciones o elemental, en algunos casos, la raíz cuadrada y el tanto por ciento, el punto decimal, el igual, un par (o tres) de teclas de memorias y las teclas de borrado.
- Por otro lado deben ser todas iguales, para evitar perder el tiempo en las características particulares de cada una.
- Usarse cuando los alumnos/as hayan sistematizado las operaciones o cuando el objetivo de la actividad no esté en el cálculo sino en el procedimiento que nos lleve al aprendizaje de nuevos contenidos.

Para lo que podemos usar la calculadora, dentro de la resolución de problemas, tendríamos:

- Agilizar el cálculo que permita realizar un mayor número de situaciones problemáticas.
- Apoyar el desarrollo conceptual.
- Permitir que el desarrollo del problema se centre en el significado y la comprensión.
- Reemplazar cálculos tediosos y repetitivos.

- Facilitar patrones de exploración e investigación.
- Eliminar la ansiedad creada por las exigencias del cálculo.
- Realzar la motivación y la confianza.
- Estimular la creatividad y la exploración.

Este último apartado es muy eficaz a la hora de que los alumnos/as creen sus propios problemas, por el componente lúdico y curioso que tiene la calculadora al girar el resultado de las operaciones 180° y aparecer en la pantalla palabras. Algunos ejemplos de esto serían:

- *“Un camión que transporta 1725,23 kg de naranjas, ha perdido 16,5 kg por el camino. ¿Cuántos kg de naranjas tiene aún el camión? ¿Qué es imprescindible para escribir esta respuesta?”*
- *“Un valioso maletín es perseguido por 3 grupos de 15 ladrones cada uno. A cada grupo le persigue un valiente policía. Cuando los tres grupos llegan al escondite del maletín, los 3 policías detienen a todos los ladrones, comprobando que dentro del maletín siguen estando las 3761 valiosas antigüedades. ¿Qué contenía el maletín?. Multiplica todos los datos y da la vuelta a la calculadora”*
- *“Un hombre ha plantado 10 y 16 árboles por fila en dos campos que tenían respectivamente 55 y 250 hileras. Si en un tercer campo tenía 500 árboles ya plantados. ¿Qué animales tenía de mascotas en sus fincas?”*

9.- ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS EN LIBROS DE TEXTO Y MATERIALES COMPLEMENTARIOS.

La práctica de nuestro trabajo diario en las aulas unida a estudio de los problemas realizado en este trabajo no lleva a concluir que la mayoría de los libros de texto y los cuadernillos de refuerzo o ampliación no trabajan de forma equitativa todas las categorías y tipos de problemas.

El análisis, de los mismos, se ha realizado desde el punto de vista de su estructura semántica y se han teniendo en cuenta los siguientes criterios:

- Identificación de la categoría y tipo de problema.
- La secuenciación de acuerdo a la lógica interna de la Aritmética.
- Estar bien secuenciados de acuerdo con el desarrollo evolutivo del niño y con el nivel académico (curso-ciclo y edad).
- La distribución, en los primeros niveles, en líneas distintas de cada dato y pregunta.
- La sustitución escritura numérica de los datos por la escrita.
- Que el aprendizaje de los números y de las operaciones se de en un contexto significativo
- Hacer modelizaciones de situaciones en el contexto del aula (entrenar al alumno en situaciones concretas).
- El trabajar la comprensión lectora del enunciado.
- La posibilidad de poder realizar una representación gráfica del problema. Todo problema debe ser representado.
- La necesidad de poder establecer los pasos.
- Si posibilita la realización de estimaciones y de contrastar la solución con los datos del problema
- Trabajar la variabilidad perceptiva o pensamiento divergente para favorecer la flexibilidad mental del niño.
- Si la oferta de tipos y categorías de problemas sea muy amplia y que abarque muchas situaciones.
- Que permita resolver los problemas de todas las formas posibles.
- Que planteen el mismo problema de formas diferentes.
- Que admitan realizar preguntas distintas ante el mismo problema o ampliar el enunciado con nuevos datos.

9.1.- Análisis de datos relativos a problemas de una operación.

En Educación Primaria los problemas que más abundan son, por este orden, los de cambio, combinación, división / multiplicación razón y comparación, lo cual es válido para los libros de texto y para los cuadernos de todas las editoriales analizadas. Entre todos constituyen un 96,16% del total.

Por el contrario, apenas se trabajan los problemas de igualación, multiplicación / división fórmula, producto cartesiano y multiplicación/división comparación, y ello solamente en algunos de los materiales bibliográficos, entre los que destacan los cuadernos de Rubio. Estos problemas constituyen solamente un 3,84% del total, un porcentaje casi puramente simbólico.

9.1.1.- Problemas de estructura aditiva

La mayoría de los **problemas de cambio** comienzan a trabajarse a la edad adecuada (97,36%). Solamente un 2,64% de ellos se introduce prematuramente, sobre todo en los cuadernos de Rubio y Anaya.

Los problemas de cambio 1 y cambio 2, excepto en los cuadernos de Santillana que los concentran en 3º, alcanzan el máximo porcentaje en 1º, 2º y disminuyen progresivamente en los cursos sucesivos (3º, 4º), hasta terminar casi desapareciendo en 5º, 6º como de operación única. Dichos problemas constituyen el 74,34% de la categoría durante la Educación Primaria. Santillana (textos con un 95,52% y cuadernos con un 83,73%) supera dicho porcentaje de manera significativa, mientras que los cuadernos de Anaya (65,14%) y los de Rubio (60,65%) se quedan bastante por debajo.

Los problemas de cambio 3 y cambio 4 alcanzan el máximo porcentaje en 2º, 3º y 4º, y se reducen significativamente en 5º y 6º o terminan desapareciendo en los cuadernos Santillana, textos Anaya y cuadernos Rubio. El porcentaje de estos problemas que se trabaja en Educación Primaria es del 20,57%, es decir, 54 puntos inferior al dado para los de cambio 1 y 2, lo cual puede considerarse, en general, una reducción excesivamente drástica. Dicha reducción es menor en los cuadernos de Anaya y Rubio, mientras que en los textos de Santillana estos tipos de problemas prácticamente desaparecen. Hay que destacar, sin embargo, que un 7,34% se incluyen de forma prematura en 1º, cuando debería hacerse en 2º y corresponden casi todos a los cuadernos mencionados.

Solamente un 5% de los problemas que se trabajan en Educación Primaria son de cambio 5 y cambio 6 y aparecen prácticamente todos ellos en los cuadernos de Rubio (88,46%), que los concentran en 2º, 3º y 4º, aunque un 30% de ellos los introducen de forma prematura en 1º.

Los **problemas de combinación** son los más abundantes después de los de cambio, excepto en los textos y cuadernos de Santillana, donde predominan. Tanto en los textos de Anaya como en los cuadernos de esta editorial y en los de S.M., reciben escaso tratamiento. Solamente se encuentra un buen equilibrio entre los problemas de combinación y los de cambio en los cuadernos de Rubio.

El 95,19% de los problemas de este tipo se introducen a su debido tiempo y sólo un 4,8% prematuramente, de los cuales casi la mitad corresponden a cuadernos Santillana. En general, el mayor porcentaje de los problemas de combinación se trabaja en 1º y en 2º de Educación Primaria, se reduce progresivamente durante el 2º Ciclo de la Etapa y termina siendo mínimo o desapareciendo a lo largo del 3º.

Por lo que respecta a los problemas de combinación 2, su tratamiento es bastante deficitario en relación con los de combinación 1 y, además, el 24% de ellos se introduce prematuramente en 1º en lugar de hacerlo en 2º, a lo que contribuyen todos los textos y cuadernos estudiados y sobre todo los de Santillana.

Los **problemas de comparación** constituyen un 12,94%, porcentaje que está bastante por debajo de las categorías anteriores. De ellos el 82,03% se introducen a su debido tiempo y un 17,97% de forma prematura en 1º en vez de hacerlo en 2º. Más de la mitad de los problemas de esta categoría son de comparación 1 (el 57,03%), seguida a bastante distancia por los de comparación 2 (el 20,70%), por los de comparación 3 (12,89%) y por los de comparación 4 (8,20%). Podría decirse que los de comparación 5 y comparación 6 no se trabajan y, cuando se hace (cuadernos Santillana y textos Anaya), su introducción es prematura, al igual que buena parte del resto de los tipos. Dichos problemas se trabajan sobre todo en 2º y 3º, bastante menos en 4º y apenas nada en 5º y 6º como problemas de operación única. De hecho, se introducen más en 1º (nivel en el que no debe trabajarse la mayor parte de este tipo de problemas) que en 4º, 5º y 6º.

Los **problemas de igualación** constituyen un 0,71% del total, lo que indica que apenas se trabajan en los materiales didácticos analizados. Además, un 21,42% se introducen prematuramente. La mayor parte de los que se trabajan son de igualación 1 e igualación 2, y se encuentran en los cuadernos de Rubio (50%) y en los textos de Anaya, mientras que no aparece ninguno de igualación 4 e igualación 6. Por niveles, dichos problemas se distribuyen de manera bastante aleatoria.

9.1.2.- Problemas de estructura multiplicativa

Un 16,88% de los problemas con estructura multiplicativas de una operación son de **multiplicación razón** y de ellos el 75,75% son de multiplicación razón 2, seguidos de lejos por los de multiplicación razón 3 (18,86%), mientras que los de multiplicación razón 1 apenas constituyen un 5,39%. En cualquier caso, las diferencias semánticas entre los de comparación 1 y 2 tal vez sean excesivamente sutiles y en consecuencia podrían considerarse como un tipo único. Aunque los cuadernos de Anaya comienzan a trabajar los problemas de multiplicación razón en 2º, nivel en el que ya pueden iniciarse, la mayor parte de ellos se encuentran en 3º (56,29%) y van disminuyendo progresivamente en niveles sucesivos hasta casi desaparecer en 6º como de operación única.

Los problemas de **división razón** representan un 18,54% del total y los materiales analizados los concentran con buen criterio en los niveles de 3º y 4º, para ir disminuyendo progresivamente en los sucesivos, aunque es la categoría que más se sigue trabajando en 5º y 6º como de una operación.

Los problemas de **multiplicación comparación** apenas constituyen un 1,52% del total. De hecho Santillana no los trabaja ni en sus textos ni en sus cuadernos, así como tampoco S.M.. El 63,33% se encuentran en los cuadernos de Rubio. La mayoría de dichos pro-

blemas son de multiplicación comparación “en más” (83,33%) y apenas un 16,66% de multiplicación comparación “en menos”. Por otra parte, los materiales bibliográficos estudiados concentran el 70% de ellos antes de tiempo en el Tercer nivel, debido probablemente a que cuando se introduce la multiplicación como operación, se proponen al alumno problemas para practicar dicha operación, pero sin tener en cuenta el nivel de dificultad semántica de los mismos.

Sólo un 0,45% de los problemas son de **división comparación**, es decir, que apenas se trabajan en los materiales didácticos analizados. Únicamente lo hacen los cuadernos de Rubio (88,88%), pero prematuramente, ya que todos son de división partición comparación “en menos” y los concentran en el 4º nivel, cuando deberían iniciarse en el 5º. Los cuadernos Santillana proponen un problema de división agrupación comparación “en menos”. Del tipo división partición y agrupación “en más” no se plantean.

Aunque, como podrá verse en la gráfica que recoge los datos de todos los materiales estudiados, se han clasificado como problemas de **multiplicación y división fórmula un** 0,35% y un 0,45% respectivamente, y solamente se incluyen en los cuadernos de Rubio (concentrándolos además de forma prematura en el 3º y 4º), es discutible que dichos problemas deban considerarse del tipo fórmula durante la etapa de Primaria, ya que lo lógico es que estos alumnos los resuelvan como de multiplicación o división razón debido a que no se trabajan en esta etapa fórmulas físicas.

Otra categoría de problemas muy escasamente trabajada es la de **producto cartesiano** (0,35%), a pesar de que ya podría introducirse a partir de 4º. El pequeño porcentaje de esta categoría de problemas aparece solamente en el libro de texto de Santillana correspondiente a 6º de Primaria.

9.2.- Análisis de datos relativos a problemas de dos operaciones.

Solamente los cuadernos de Anaya introducen algunos problemas de dos operaciones en 1º, mientras que no plantean ninguno en 2º. El resto del material bibliográfico analizado comienza a presentarlos en este nivel e incrementa su número en los sucesivos, para disminuir de nuevo o incluso desaparecer (caso de los cuadernos de Rubio) en 6º. La mayor parte de dicho material, como los cuadernos de Santillana, los textos de Anaya y los cuadernos de Rubio, concentra más cantidad de problemas de dos operaciones en 4º y 5º. Los cuadernos de Anaya y de S.M. lo hacen en 3º y 4º, y los textos de Santillana en 5º y 6º.

Aunque con algunas variaciones según las editoriales, los problemas de dos operaciones que más abundan en general son los de cambio-cambio y los de cambio-multiplicación razón, seguidos a bastante distancia y por este orden por los de:

- cambio-combinación
- combinación-multiplicación razón
- multiplicación razón-división partición razón
- cambio-división partición razón

- combinación-combinación
- multiplicación razón-multiplicación razón
- multiplicación razón-división agrupación razón
- cambio-división agrupación razón
- combinación-división partición razón
- combinación-comparación
- cambio-comparación
- combinación-división agrupación razón
- comparación-multiplicación razón.

La presencia de las demás categorías y/o tipos es mínima en todos los materiales analizados, y nula la consistente en combinar cualquiera de dichas categorías con la de igualación.

Dependiendo de las editoriales, los problemas que combinan sumas/restas con multiplicaciones/divisiones y las que combinan sumas y restas entre sí, son las más numerosos, excepto en los cuadernos de SM, donde abundan más los que combinan multiplicaciones y divisiones entre sí, si bien este material bibliográfico es poco significativo, ya que contiene un escasísimo número de problemas.

9.3.- Análisis de datos relativos a problemas de tres o más operaciones

Los problemas de tres o más operaciones comienzan a aparecer en 3º, aunque de manera simbólica y, dependiendo de las editoriales, son más frecuentes en 4º, 5º y 6º.

En general, el número de estos problemas es bastante inferior a los de dos operaciones y especialmente a los de una.

Por editoriales, donde más se encuentran es en los textos y cuadernos de Santillana, siendo más escasos en los cuadernos de SM y Anaya.

9.4.- Análisis de datos atendiendo al número de operaciones.

Atendiendo al número de operaciones, los problemas que más abundan son los de una sola (61,31%), seguidos a bastante distancia de los de dos (26,61%) y por los de tres o más (12,08%).

Del material bibliográfico analizado, los cuadernos de Rubio son los que más problemas plantean de una y dos operaciones, seguidos de Santillana, tanto textos como cuadernos, que son los que más contienen de tres o más operaciones.

Los cuadernos de SM son los que menos problemas plantean, tanto de una y dos operaciones, como de tres o más, seguidos por los de Anaya.

9.5.- Conclusiones Finales.

Podríamos concluir finalmente, que tanto los cuadernos de Rubio como los textos y cuadernos de Santillana son los que más problemas de una, dos y tres o más operaciones plantean en la etapa de Educación Primaria, por lo que podrían utilizarse en cierto modo como material de ampliación. Los cuadernos de SM y los de Anaya, por el contrario, son los que contienen menor número de problemas. Sin embargo ninguno de ellos, en su redacción, gradúa el aprendizaje con cuestiones como presentar los datos numéricos con su nomenclatura escrita, o iniciar a la resolución de problemas planteando cada dato numérico en un renglón, al objeto de facilitar su comprensión.

En cualquier caso, todo el material bibliográfico analizado debería reconsiderar la secuenciación de la dificultad de los problemas desde el punto de vista semántico, e introducir los de aquellas categorías y/o tipos que, como hemos visto, apenas se trabajan o no se trabajan en absoluto. En general, los problemas más escasos o casi ausentes son los inconsistentes.

Todas las editoriales en general incluyen muchos problemas de cambio y combinación, así como de multiplicación y división razón, pero hay categorías y muchos tipos dentro de éstas, que se trabajan muy poco o incluso nada.

En general, la mayoría de los problemas que se plantean son consistentes, mientras que apenas se presentan problemas inconsistentes. Puede consultarse la Introducción para aclarar estos dos conceptos.

10.- LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL CURRÍCULUM Y EL PLAN DE CENTRO

10.1.- La resolución de problemas en el currículo de la E. Primaria en Andalucía.

Transcribimos íntegro, por si valor aclaratorio, el apartado relativo a la resolución de problemas que aparece en la Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía”

“1. Resolución de problemas.

Relevancia y sentido educativo. La resolución de problemas debe entenderse como la esencia fundamental del pensamiento y el saber matemático, y en ese sentido ha de impregnar e inspirar todos los conocimientos que se vayan construyendo en esta etapa educativa, considerándose como eje vertebrador de todo el aprendizaje matemático y orientándose hacia la reflexión, el análisis, la concienciación y la actitud crítica ante la realidad que nos rodea en la vida cotidiana.

El estudio a través de la resolución de problemas fomenta la autonomía e iniciativa personal, promueve la perseverancia en la búsqueda de alternativas de trabajo y contribuye a la flexibilidad para modificar puntos de vista, además de fomentar la lectura comprensiva, la organización de la información, el diseño de un plan de trabajo y su puesta en práctica, así como la interpretación y análisis de resultados en el contexto en el que se ha planteado y la habilidad para comunicar con eficacia los procesos y resultados seguidos.

La resolución de problemas debe contribuir a introducir y aplicar los contenidos de forma contextualizada, a conectarlos con otras áreas de conocimiento contribuyendo a su afianzamiento, a la educación en valores y al desarrollo de destrezas en el ámbito lingüístico, ya que previamente al planteamiento y resolución de cualquier problema se requiere la traducción del lenguaje verbal al matemático y, más tarde, será necesaria la expresión oral o escrita del procedimiento empleado en la resolución y el análisis de los resultados. Por todo ello resulta fundamental en todo el proceso la precisión en los lenguajes y el desarrollo de competencias de expresión oral y escrita.

Contenidos relevantes.

Los niños y niñas del tercer ciclo, para los que la resolución de problemas resulta especialmente adecuada para ser trabajada, deben familiarizarse con alguna estrategia heurística de resolución de problemas, como la basada en cuatro pasos para resolver un problema matemático: comprender el enunciado, trazar un plan o estrategia, ejecutar el plan y comprobar la solución en el contexto del problema.

Interacción con otros núcleos temáticos y de actividades. Más que estar relacionado con el resto de núcleos temáticos de matemáticas, la resolución de problemas constituye en

sí misma la esencia del aprendizaje que ha de estar presente en todos núcleos temáticos de esta materia.

Evidentemente, la resolución de problemas tiene una fuerte relación con todos los núcleos temáticos de las materias del área lingüística.

En todos los cursos deben abordarse situaciones relacionadas con todas las materias y, de manera especial, con los núcleos de problemas que se estudian en el área Conocimiento del medio natural, social y cultural. Asimismo, se incluirán en la resolución de problemas aquellas situaciones que se derivan de la vida cotidiana y doméstica.

Sugerencias acerca de líneas metodológicas y utilización de recursos.

Se introducirán los nuevos conceptos fundamentándolos a través de situaciones que manifiesten su interés práctico y funcional, y se profundizará en su conocimiento, manejo y propiedades a través de la resolución de problemas.

Tanto en el estudio de situaciones problemáticas como, en general, en todo proceso de construcción del aprendizaje matemático deberán utilizarse como recursos habituales juegos matemáticos y materiales manipulativos e informáticos. En este sentido, se potenciará el uso del taller y/o laboratorio de matemáticas.

Los estudiantes de esta etapa educativa deben pasar de situaciones problemáticas concretas y sencillas, al principio en los dos primeros ciclos, relacionadas con el entorno inmediato, a situaciones algo más complejas, en el último ciclo, para facilitar la adquisición del pensamiento abstracto.

En todas las situaciones problemáticas, incluyendo los problemas aritméticos escolares, se graduarán los mismos, pasando de situaciones que se resuelvan en una etapa a aquellas de dos o tres etapas. En los problemas aritméticos se deberán tener en cuenta las diferentes categorías semánticas y graduarlos en función de su dificultad.

Criterios de valoración de los aprendizajes.

Respecto a la evaluación de la resolución de problemas, mucho más que los resultados obtenidos finalmente, deben valorarse, objetivamente, como aspectos imprescindibles a considerar todas las destrezas que intervienen en el estudio de la situación problemática, tales como la lectura comprensiva del enunciado, la formulación e interpretación de los datos que intervienen, el planteamiento de la estrategia a seguir, la realización de las operaciones o la ejecución del plan, la validación de los resultados obtenidos y la claridad de las explicaciones.”

5.2.- Propuestas para el Plan Anual de Centro.

BIBLIOGRAFÍA:

ALGARABEL, S.; DASÍ, C.; GOTOR, A.; PEREA, M.: “Solución de problemas: Una revisión de la importancia del uso de heurísticos y una evaluación de su utilización en matemáticas”, en Revista Española de Pedagogía, 203, (1996), pp. 143-165.

ALONSO GARCÍA, V.: “Estrategias operativas en la resolución de los problemas matemáticos en los niños del ciclo medio de la E.G.B.”, en Aula Abierta, 47(12), (1986), pp. 165-196.

ÁLVAREZ, S. y CRUZ, M. “Estrategias metacognitivas en la formulación de problemas para la enseñanza de la Matemática”. Publicación interna del ISP "José de la Luz y Caballero", Holguín.

DE GUZMÁN, Miguel “Enseñanza de las Ciencias y la Matemática”. España.

Equipo de Orientación Educativa y Psicopedagógica de Ponferrada. “Resolución de problemas aritméticos en educación primaria”. <http://centros6.pntic.mec.es/equipo.general.ponferrada/>

GERMÁN BERNABEU SORIA “100 Problemas matemáticos, Recursos para el aula”
Jerónimo Juidías Barroso y Isabel R. Rodríguez Ortiz. “Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos”. Revista de Educación, 342. Enero-abril 2007, pp. 257-286

GODINO JUAN D. “Didáctica de las Matemáticas para Maestros”. Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada.

LABARRERE, A. “Como enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas”. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

LURIA, A. R.; Y TSVETKOVA, L. S. “La resolución de problemas y sus trastornos”. Barcelona: Fontanella.

MARTINEZ MONTERO, JAIME. “Una nueva DIDÁCTICA DEL CÁLCULO para el siglo xxi”. Monografías Escuela Española.

NURIA GIL IGNACIO, LORENZO J. BLANCO NIETO, ELOÍSA GUERRERO BARONA (Universidad de Extremadura). “El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos”

POLYA, G. “Como plantear y resolver problemas”. Editorial Trillas, México.

RICO, L. “Errores en el aprendizaje de las matemáticas”. Kilpatrick, J, Gómez, P y Rico, L (Editores) Educación matemática. México: Grupo editorial Iberoamericana.

SANTOS, L. M., "Resolución de problemas: el trabajo de Alan Schoenfeld: una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas", Revista Matemática Educativa, vol. 4, núm. 2, agosto 1992, pp. 16-24.