Capítulo 3

Adición y sustracción

(Carlos Maza)

1. Contextos y usos de la adición y la sustracción

1.1 La operación aritmética como acción transformadora

En los capítulos anteriores se ha valorado la importancia de cuantificar el mundo en que vivimos de modo que los fenómenos con los que tratamos se puedan describir de una forma más precisa que los simples apelativos de ‘pocos’ y ‘muchos’. Sin embargo, con las operaciones aritméticas no sólo se describe la realidad circundante sino que se actúa sobre ella, transformándola.

En efecto, si una persona tiene un billete de tres mil pesetas en el bolsillo el número aquí mide una cantidad de una determinada magnitud (dinero). Si una abuela generosa le da dos mil pesetas por su cumplea½os este nuevo número vuelve a medir otra cantidad de la misma magnitud. Con ello se describen dos cantidades presentes en la situación. Sin embargo, la persona en cuestión transforma la situación en otra reuniendo, juntando las dos cantidades para dar lugar a otra que le permite afirmar: “Tengo cinco mil pesetas en total”. Con ello se permite describir numéricamente una nueva situación, una situación (la del total de sus ahorros) conseguida al transformar dos situaciones previas.

Así pues, la cuantificación de las situaciones que nos rodean corresponden fundamentalmente a una acción descriptiva mientras que las operaciones aritméticas remiten a una acción transformadora por la que dos situaciones interactúan para dar lugar a una nueva situación que de nuevo se describe numéricamente.

1.2 Importancia social y cultural de la adición y sustracción

Este tipo de acciones transformadoras no sólo son habituales sino que constituyen la estructura habitual de nuestro quehacer cotidiano, tanto en el mundo infantil como en la vida adulta, sea cotidiana o profesional. Uno de los contextos más frecuentes en dicho sentido es el de la compra y la venta. Si nos ce½imos a la adición y sustracción numerosas acciones de compra y venta serían imposibles de describir sin estas operaciones: La cajera del supermercado realiza una suma o adición de los precios, el comprador entrega un dinero que excede la cantidad a pagar por lo que procede hacer una resta, a continuación se compra el periódico y se cuentan las pesetas para que sumen la cantidad debida, etc. En el tipo de sociedad que vivimos (basada económicamente en la acción de consumir) los ni½os no se encuentran ajenos a tal actividad. Resulta ilustrativo en dicho sentido observar las operaciones aritméticas que realizan frente al vendedor de chucherías o el de juguetes, por ejemplo. Como normalmente disponen de un dinero limitado tienen que ir pidiendo lo que desean y sumando al mismo tiempo para observar si disponen del dinero necesario, han de ir aprendiendo a pedir la ‘vuelta’ del dinero entregado. Todas estas acciones elementales desde el punto de vista económico constituyen sin embargo un caldo de cultivo extremadamente importante, por su frecuencia y variedad de situaciones, en el aprendizaje y práctica cotidianos de las operaciones de sumar y restar.

No obstante, la adición y sustracción están presentes en múltiples situaciones más de la vida cotidiana. En lo que se refiere a los números más elementales (menores que la decena) una de estas situaciones es la medida del tiempo. Si un ni½o entra en su colegio a las nueve de la ma½ana ócuántas horas faltan para el recreo o para terminar la jornada escolar?. Si hemos quedado a las siete de la tarde y son las cinco, ócuántas horas me quedan para estudiar Matemáticas?. Si en la costa este norteamericana son seis horas menos que en Espa½a, óqué hora es en estos momentos en Nueva York?.

Desde un punto de vista profesional los adultos han de emplear de una manea frecuente las diversas operaciones aritméticas. Así lo expresa, con algunas peculiaridades, el informe Cockcroft (1985):

> "La necesidad de saber realizar cálculos aritméticos de diferentes clases aparece entre las exigencias matemáticas de casi todos los tipos de empleo... Estos cálculos se hacen a veces mentalmente, a veces con papel y lápiz, y otras con una calculadora. " (pág. 26).

Actualmente, numerosas profesiones disponen de medios tecnológicos importantes, particularmente en el sector de servicios. Sin embargo, en la peque½a empresa dichos medios están limitados y se recurre muy frecuentemente al cálculo escrito o mental, sea exacto o bien aproximativo.

Habitualmente, todas estas operaciones se realizan sobre números mayores que la decena pero no se puede olvidar que su realización (sobre todo si ésta es de carácter mental) se apoya en un buen conocimiento de las operaciones aritméticas sobre números elementales. En este sentido conviene recordar que la adición y sustracción de números menores que la decena (que constituyen el contenido de este capítulo) son el fundamento de nuevos conocimientos escolares más desarrollados que serán abordados en los próximos capítulos. Así, la realización de algoritmos de suma y resta descansa sobre las mismas operaciones en números elementales, diversos problemas de multiplicación y división se resolverán por suma o resta reiterada, el cálculo con fracciones, decimales se apoya en los mismos conocimientos previos.

En resumen, la adición y sustracción son operaciones aritméticas que están presentes en numerosos contextos y situaciones de la vida cotidiana infantil y adulta, particularmente los de compra y venta así como en los relacionados con medidas, sea del tiempo, de volumen, de peso, etc. Desde el punto de vista profesional las operaciones se realizan generalmente sobre números mayores que la decena pero ello permite suponer un adecuado dominio de las operaciones elementales, tanto para hacer cálculos mentales como aproximativos.

Actividad 1

Anota durante varios días todas aquellas situaciones cotidianas en que utilices sumas o restas elementales describiéndolas a través de la siguiente serie de preguntas:
* óCuál es el contexto general en que se ha planteado la operación?.
* óSe ha planteado con efectos descriptivos o como un problema necesario de resolver?.
* óEra imprescindible o solo aconsejable operar de forma mental?.

1.3 Fenomenología de la adición y sustracción.

El término de 'adición' proviene del latín 'addo, is' significando 'a½adir, agregar'. Una definición habitual en libros de texto aritmético del siglo XIX y comienzos del XX consistía en afirmar que "Sumar es reunir varios números en uno sólo" (Vidal 1909). La operación se define por su aplicación a los números, no por las situaciones en las que dicha aplicación tiene lugar.

De igual manera, el término de 'resta' tiene su origen en el latín 'restare', sobrar, quedar. Las antiguas definiciones de los libros de texto hacían descansar la operación en la anterior afirmando que "La sustracción es el análisis de la adición, y tiene por objeto, dada la suma de dos sumandos y uno de éstos, hallar el otro". Así pues, se define no por la acción que describe (quedar, quitar) sino por el hecho de que se puede entender como una suma donde se ignora uno de los sumandos.

En todo lo dicho subyace una sencilla idea: Las operaciones se pueden entender al menos de dos maneras, una específicamente matemática y otra que se relaciona con la descripción de acciones realizadas por una persona en una situación determinada. Por ejemplo, si un ni½o tiene cinco canicas y gana otras cuatro a lo largo de una tarde, querrá calcular al final cuántas tiene finalmente. Desde un punto de vista matemático se efectúa una suma entendiéndola como la 'reunión de los números cinco y cuatro en uno sólo, nueve'. Desde el punto de vista que coloca el conocimiento en una situación determinada, la suma puede ser entendida como una operación aritmética que describe una acción de a½adir realizada por el ni½o en cuestión.

Es indudable que existe entre ambas perspectivas una relación puesto que ambas parten del mismo fenómeno pero las diferencias son también sensibles: En el primer caso el objeto de conocimiento está desligado de la situación, del contexto en el que se inscribe dicho fenómeno, mientras que en el segundo caso el objeto de conocimiento está indisolublemente ligado a la situación. En el primer caso la operación aritmética estará bien definida en cuanto se adecue de forma consistente a los conocimientos matemáticos previos. En el segundo caso dicha operación estará bien definida en cuanto describa adecuadamente la acción ejercida por la persona dentro de la situación, y esta adecuación vendrá dada por el hecho de que esta acción que se describe respete el significado dado por la persona a la acción emprendida.

Actividad 2

De las situaciones y contextos encontrados en la primera actividad, discutir y elaborar diversos criterios para repartir en clases diferentes las situaciones planteadas observando sus aspectos comunes y sus diferencias en cuanto al significado de la acción ejercida. óSon iguales todas las situaciones susceptibles de resolverse con la suma? óY las que son resolubles por la resta?.

1.4 Los símbolos de la adición y sustracción

Una de las formas más conocidas de representar estas primeras operaciones aritméticas es a través de la representación simbólica, como en el caso de 5 + 3 = 8 o bien 8 - 3 = 5. Resulta interesante constatar que estos símbolos no siempre se han utilizado de esta manera. En efecto, durante un muy largo tiempo la descripción de este tipo de situaciones era a través de palabras: “Cinco más tres es igual a ocho”, por ejemplo. Las operaciones aritméticas y algebraicas conocieron un gran impulso teórico en el siglo XVI italiano, lo que condujo a que se utilizara como expresiones las palabras ‘piu o plus’ (mas) y ‘meno o minus’ (menos) y sus abreviaturas que funcionaban como símbolos, p. y m. Estos nuevos símbolos no encontraron una difusión suficiente en el conjunto de aritméticas comerciales francesas y germanas que eran características del desarrollo comercial europeo de la época.

J. Widman, alemán, escribe en ese tiempo una obra titulada ‘Cálculo rápido y elegante para todos los futuros comerciantes’ en el que utiliza unos nuevos símbolos para estas operaciones, nuestros conocidos + y -. El origen del primero resulta evidente como una simbolización del término ‘et’ (copulativa ‘y’ en latín) y, en concreto, de la t de dicha palabra que solía escribirse con una forma ornamental. El origen del símbolo de la resta, en cambio, queda en la oscuridad y no ha podido determinarse con seguridad.

En el siglo XVI vive también R. Recorde, introductor de la aritmética mercantil en Inglaterra. Este autor propone simbolizar la igualdad con el signo = , símbolo que no es universalmente admitido hasta bastante tiempo después. El término latino ‘aequetur’ (‘igual’ en castellano, abreviado ae) tiene una gran difusión y por ello se puede ver aún en el siglo XVII al conocido filósofo matemático Descartes empleándolo asiduamente. El declive paulatino del latín como lengua científica y una necesidad progresiva de abreviación en la escritura matemática inclinó la balanza finalmente hacia la aceptación del símbolo propuesto por Recorde.

1.4 El currículum anterior

Para comprender mejor el tratamiento curricular actual de la ense½anza de la adición y sustracción resulta de interés contrastar las directrices que se extraen del Dise½o Curricular Base respecto a las que se propugnaban en la etapa educativa anterior. Así, en la primera etapa de la Educación General Básica se defendía para el primer curso de E.G.B. los siguientes objetivos:

- Conjuntos. Idea de subconjunto. Representación de conjuntos. Unión de conjuntos disjuntos.
- Sistemas de numeración. Numeración decimal. Aprendizaje de los números hasta la

centena.

- Adición de números. Sustracción de números. Problemas y ejercicios simultáneos. Automatización de dichas operaciones con números de una y dos cifras.

Actividad 3

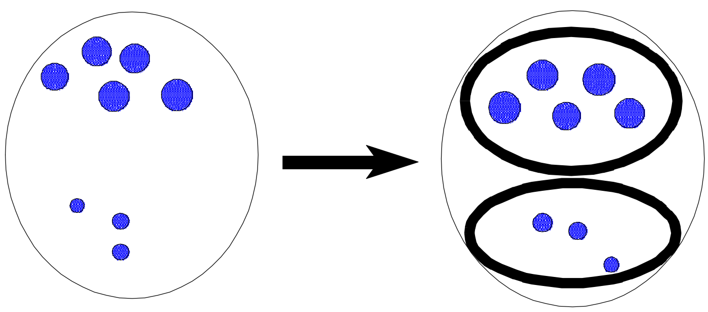
Leer y discutir los fundamentos y las posibles consecuencias del siguiente párrafo, extraído de las orientaciones generales para la primera etapa de la E.G.B. en el área de Matemáticas (1970):

> "La ense½anza de la matemática... debe centrarse en el proceso de matematización de los problemas, creación de sistemas formales, utilización de las leyes de estos sistemas para obtener unos resultados e interpretación de los mismos.
> En la primera etapa de E.G.B. se pretende que los alumnos sean capaces de llegar a la expresión numérica mediante el ejercicio y empleo consciente de las relaciones entre conjuntos, la comprensión del número como una propiedad de aquéllos...
> Se evitará, por otra parte, la memorización de conceptos. Las operaciones en la aritmética constituyen un ejemplo altamente significativo. Tradicionalmente han sido ense½adas en forma memorística, sin el conocimiento previo de la numeración y presentadas en forma aislada y poco coherente. Ahora, la etapa preparatoria de las operaciones entre conjuntos y la aplicación numérica subsiguiente subsanan este defecto".

Bajo esta perspectiva la ense½anza de la adición, en primer lugar, se basa en la unión de conjuntos disjuntos. Por ello, un modelo de secuencia de ense½anza sería el siguiente:

1.- Cuando el alumno está acostumbrado a construir y representar conjuntos, ello le puede llevar a considerar la lista de sus elementos, es decir, su número.

2. Ello le conduce a actividades de clasificación dentro de un conjunto, es decir, a su reparto en dos subconjuntos, por ejemplo de grandes y peque½os. Si se considera cada uno de estos últimos se construirán y aislarán dichos subconjuntos.



3. El último paso consiste en que el alumno (a partir del nivel preescolar) vaya asociando al conjunto y a sus subconjuntos el cardinal correspondiente, de manera que las primeras actividades consistan en la descomposición de un número dado en dos sumandos:

$$9 = 5 + 4$$

1.5 Aspectos curriculares actuales

El Dise½o Curricular Base, documento fundamental en el actual período educativo, marca un giro importante en el tratamiento de las Matemáticas en la ense½anza primaria y, en particular, sobre el tema de las operaciones aritméticas elementales. Ello se traduce en el siguiente esquema:

Actividad 4

Revisa en equipo y discute en clase la presentación de la suma y la resta en el primer curso de la E.G.B. a partir del estudio de diversos libros de texto de la década de los setenta y ochenta. Observa los cambios producidos en ambos períodos.

Adición y sustracción: Contenidos relacionados		
Conceptos	**Procedimientos**	**Actitudes**
- Situaciones en las que intervienen estas operaciones: La suma como unión, incremento; la resta como disminución, comparación, complemento. - La identificación de las operaciones inversas (suma y resta). - Correspondencias entre lenguaje verbal, representación gráfica y notación numérica.	- Utilización de diferentes estrategias para resolver problemas numéricos y operatorios. - Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos y en la resolución de problemas numéricos u operatorios. - Representación matemática de una situación utilizando sucesivamente diferentes lenguajes (verbal, gráfico y numérico) y estableciendo correspondencias entre los mismos.	- Rigor en la utilización precisa de los símbolos numéricos y de las reglas de los sistemas de numeración, e interés por conocer estrategias de cálculo distintas a las utilizadas habitualmente. - Confianza en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales de cálculo mental.

2. Concepto de las operaciones de adición y sustracción

2.1 La adición y sustracción como objetos matemáticos

Se ha comentado en el punto 1.3 que la adición y sustracción pueden entenderse como un objeto matemático cuya validez vendrá dada por la consistencia con otros conceptos matemáticos previos o, en otras palabras, que no entre en contradicción lógica con los conceptos matemáticos que lo fundamentan. Estos son, en concreto, las operaciones de unión y diferencia de conjuntos y el concepto de aplicación entre conjuntos.

La suma de dos números naturales **a** y **b** se define del siguiente modo:

> Sea **a** = cardinal (A) y **b** = cardinal (B) siendo A y B dos conjuntos disjuntos, es decir, cumpliendo $A \cap B = \emptyset$. Se define la adición en el conjunto **N** de números naturales como la aplicación entre el producto cartesiano **N x N** y el conjunto **N**
>
> $$\mathbf{f: N \times N \to N}$$
>
> tal que si f **(a,b)** = **c** es **c** = cardinal ($A \cup B$) donde $A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ ó } x \in B\}$

> **Actividad 5**
>
> Comparar y discutir el siguiente párrafo de la introducción del D.C.B. al área de Matemáticas (1989) respecto al estudiado en la tercera actividad:
>
> “La capacidad de aplicar los conocimientos matemáticos a la vida cotidiana, a otros campos de conocimiento o a estudios posteriores no depende exclusivamente de cuáles son estos contenidos, sino también de cómo han sido construidos y utilizados en al escuela. Dicho de otra manera, estudiar contenidos matemáticos objetivamente útiles como la medida, la semejanza o las operaciones numéricas no garantiza que se sepan aplicar oportunamente en ocasiones posteriores. La realización de un aprendizaje significativo exige que el alumno observe, se haga preguntas, formule hipótesis, relacione los conocimientos nuevos con los que ya posee,...”.

Una definición de la resta o sustracción de dos números naturales se basa, en este caso, en la operación conjuntista de diferencia entre conjuntos.

> Sea **a** = cardinal (A) y **b** = cardinal (B) estando $B \subseteq A$. La sustracción en el conjunto **N** puede definirse como la correspondencia **h : N x N → N** tal que si h(**a,b**) = **c** es **c** = cardinal (A - B) donde $A - B = \{x \,/\, x \in A \text{ y } x \notin B\}$

Una diferencia importante entre la definición de ambas operaciones es que la primera es una aplicación mientras que la segunda no. Ello es debido a que la sustracción no cumple una de las condiciones definitorias de aplicación: Todo elemento del conjunto original (N x N) ha de tener una imagen por la aplicación en N. Pero la sustracción no está definida para cualquier pareja de números naturales, como sucede en el caso de (3,5) cuya diferencia 3 - 5 no es un número natural.

Ello hace que muchas veces se adopte como definición matemática de la sustracción una que la hace depender de la adición:

> Dados dos números naturales **a,b** se cumplirá **a - b = c** cuando exista un número natural **c** tal que se cumpla **b + c = a**

Esta definición es la que motiva que se le asigne a la sustracción un carácter ‘inverso’ de la adición, entendiéndola como una suma donde se ignora uno de los sumandos. Desde el punto de vista matemático este carácter ‘inverso’ no es riguroso en modo alguno ya que la aplicación inversa de la adición sería supuestamente la definida entre **N** y el producto cartesiano **N x N**

f' : N 6 N x N

de manera que f' (5) = (9,4). Pero también sucedería que f' (5) = (7,2), por ejemplo, revelando que f' no es una aplicación dado que un elemento original (en este ejemplo el 5) sólo puede tener una imagen y no dos o más como en este caso.

Desde el punto de vista matemático, pues, la operación de adición es una aplicación que carece de

aplicación inversa. El carácter 'inverso' de la sustracción respecto de la adición responde más bien a otros criterios basados en la acción de la persona que resuelve una sustracción como la suma donde se ignora uno de los sumandos. En otras palabras, la operación aritmética no es entendida como objeto matemático sino como descripción de una acción dentro de una situación determinada.

2.2 Situación de Cambio

Cambio aumentando

Un ni½o tiene cinco canicas cuando comienza a jugar. Durante el juego gana tres canicas. óCuántas canicas tendrá al final?

En este problema se dispone de una cantidad inicial que cambia cuando se la aumenta en otra determinada cantidad. Fruto de ello es que, finalmente, la cantidad inicial (cinco canicas) se ha transformado en otra mayor (ocho canicas). Se produce un cambio que supone un aumento. Si el cambio es una disminución resulta un problema como el siguiente:

Cambio disminuyendo

Un ni½o tiene cinco canicas cuando comienza a jugar. Durante el juego pierde tres canicas. óCuántas canicas tendrá al final?.

Esquemáticamente se pueden representar ambos problemas del siguiente modo:

A pesar de que los dos problemas muestran características comunes (por inscribirse ambos en la misma situación de Cambio) también encierran importantes diferencias. En el primero el cambio supone un aumento y una disminución en el segundo, lo que conduce a que la operación que los resuelve sea también distinta: Una suma en el primer caso y una resta en el segundo.

Ahora bien, los ni½os de cuatro o cinco a½os que se enfrentan a estos problemas pueden no haber aprendido aún en la escuela estas operaciones aritméticas. Sin embargo, han estado inmersos en esta situación de cambio fuera de la escuela y la han afrontado con el recurso más elemental de que disponen: El conteo de canicas y, en su defecto, de los dedos de sus manos. Así, se encuentran como estrategias informales cualquiera de las siguientes para resolver el problema de Cambio Aumentando:

1. "Contar todo".- Consiste en disponer las canicas iniciales (cinco), a½adirle a continuación las canicas de aumento (tres) y contar todas empezando por la primera hasta la última (ocho en total). Es la estrategia más frecuente por su simplicidad.

2. "Contar a partir del primer sumando".- Aquellos ni½os que tienen capacidad para contar hacia adelante a partir de un número cualquiera, pueden llegar a ser capaces de establecer un conteo a partir de la consideración del primer sumando: 'Cinco, seis, siete, ocho'.

La situación de Cambio disminuyendo se afronta de un modo distinto:

1. “Separar de”.- El ni½o dispone la cantidad inicial de objetos o dedos (cinco) pasando entonces a contar la cantidad de cambio realizado (tres) sobre los objetos iniciales (sea apartándolos o flexionando los dedos correspondientes). Con ello quedará un grupo de objetos o dedos (dos) que pasará a contar dando la respuesta final. Esta estrategia es más elemental que la siguiente, que supone un adecuado dominio del conteo regresivo de números.

2. “Contar hacia atrás”.- Se parte de la cantidad inicial para contar hacia atrás tantos números como sea la cantidad de cambio realizado, “cinco, cuatro, tres, dos”.

Actividad 6

óQué habilidades numéricas relacionadas con el conteo se ponen en práctica en las estrategias anteriores?. óPor qué la estrategia de “Contar a partir del primer sumando” es más compleja que la de “Contar todo”?. Existe otra estrategia consistente en sumar a partir del mayor sumando, sea éste el primero o segundo de los dados. óEn qué casos será posible detectar su presencia? óEs más sencilla o compleja que las anteriores?. Razona tu respuesta.

óPor qué es más infrecuente la estrategia de “Contar hacia atrás” que la de “Separar de”?. De nuevo, óqué habilidades numéricas se ponen en acción en ambos casos?.

Todas las estrategias relacionadas tienen un rasgo en común que resultará más adelante de gran importancia para justificar los errores cometidos por los alumnos de Primaria. Observemos este rasgo en el caso del problema de Cambio aumentando.

	Inicial	**Cambio**	**Final**
Situación	Un ni½o tiene 5 canicas	Gana tres canicas	óCuántas tiene al final?
Estrategia	Dispone 5 objetos Extiende 5 dedos	Coloca 3 objetos más Extiende 3 dedos más	Cuenta todos los objetos Cuenta los dedos extendidos
Cálculo	5	+ 3	5 + 3 = 8

La característica común es que es posible relacionar estrechamente cada momento (inicial, cambio y final) del problema con la estrategia seguida y con el cálculo aritmético a realizar. A cada momento marcado en la situación le corresponde una acción infantil con objetos o dedos y, en el momento que sea posible, una simbolización aritmética adecuada. Es posible entonces realizar lo que se denomina un ‘modelado directo’ de los momentos presentes en el problema planteado.

Desde el punto de vista de la abstracción en los métodos infantiles de resolución es necesario a½adir que este ‘modelado’ resulta favorecido indudablemente por la posibilidad de manipular objetos (canicas o fichas, por ejemplo). Cuando no se dispone de tal material los ni½os suelen utilizar los dedos en la forma descrita pero este paso no es inmediato para muchos de los que comienzan a resolver estos problemas en el nivel de la Educación infantil.

Actividad 7

En la segunda actividad de las propuestas en este capítulo clasificastes situaciones susceptibles de ser resueltas con la adición o con la sustracción. óTodas ellas se ajustan al esquema adoptado en las situaciones de Cambio expuestas? Si existen otras, ócuáles son sus características más se½aladas? óEn qué se diferencian de las situaciones de Cambio?.

2.3 Situación de Combinación

Combinación

Juan tiene cuatro comics de su héroe favorito. Carmen tiene tres comics distintos del mismo personaje. Si se reúnen los dos a leerlos ócuántos comics tendrán en total?

Este problema muestra dos cantidades (cuatro y tres comics) cuya suma conduce al resultado final. En este sentido, el parecido con el primer problema planteado acaba en que la misma operación aritmética los resuelve a ambos. Desde el punto de vista del significado que se le puede atribuir a ambos se observa que ahora no hay cambio alguno de una cantidad inicial sino que aparecen dos cantidades iniciales ejerciendo ambas el mismo papel. La reunión de ambas es la acción que resuelve el problema pero dicha acción no es un cambio sino una combinación de las dos cantidades.

Esquemáticamente se puede representar del siguiente modo:

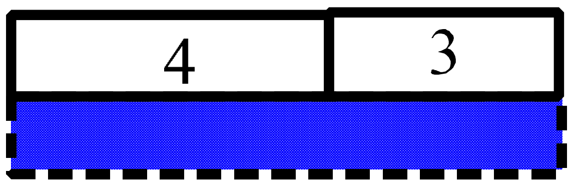
Los problemas de Combinación se caracterizan básicamente por contar con dos cantidades estáticas que forman parte de un todo que las incluye. Son estáticas por cuanto no cambian con el transcurso del tiempo tal como se apreciaba en los problemas de Cambio.

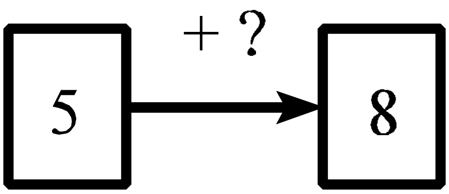
Las estrategias que resuelven este problema son las mismas que las encontradas en la situación de Cambio aumentando, es decir, las de "Contar todo", "contar a partir del primer sumando", etc. El nivel de dificultad es también similar dado que son resueltos por ni½os en el último a½o de Educación infantil. La razón fundamental de esta facilidad es nuevamente el hecho de que existe un paralelismo entre los distintos momentos presentes en el problema y las estrategias que lo resuelven, es decir, que es posible el "modelado directo" mediante objetos, dedos o exclusivamente de forma verbal.

Sin embargo, el carácter estático de las cantidades en contraposición al dinámico de las situaciones de Cambio sí trae una consecuencia no apreciable en este momento pero sí en otros problemas posteriores. En efecto, cuando en una situación de Combinación las dos cantidades ejercen un papel similar (tienen, por tanto, el mismo significado en cuanto partes de un todo desconocido) ello hace precisamente que el problema no varíe al intercambiar esos papeles. En la estrategia de "Contar todo" dará lo mismo contar en primer lugar cuatro comics y luego tres o contar tres comics y luego cuatro. Sin embargo, en una situación de Cambio los papeles de ambas cantidades no son intercambiables: Si inicialmente se tienen cinco canicas y luego se ganan tres violentaría mucho el significado de cada cantidad empezar por contar tres y luego contar las cinco iniciales.

Dicho en otras palabras, el problema de Combinación aquí planteado se resuelve con la misma operación aritmética que el de Cambio aumentando. Sin embargo, en la situación de Combinación la suma es conmutativa en cuanto las dos cantidades dadas tienen un significado indistinto mientras que en la de Cambio la suma no es conmutativa por ser el significado diferente de las dos cantidades (una inicial, otra el cambio producido).

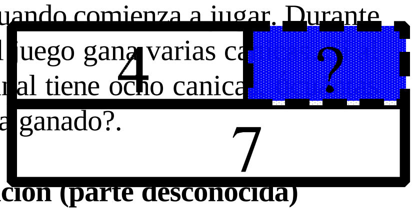
2.4 Cambio y parte desconocidos





Cambio aumentando (cambio desconocido)

Un ni½o tiene cinco canicas cuando comienza a jugar. Durante el juego gana varias ca final tiene ocho canica ha ganado?.



Combinación (parte desconocida)

Juan tiene cuatro comics de su héroe favorito. Si María tiene varios comics distintos del mismo personaje y entre los dos tienen siete comics en total. óCuántos comics tiene María?.

Se han colocado juntos dos problemas que, pese a referirse a situaciones diferentes (Cambio y Combinación), muestran un planteamiento similar y son resolubles por la misma operación, en este caso la resta.

Si se comparan estos problemas con los expuestos en los dos apartados anteriores y que eran resolubles con la suma, se encuentran una serie de diferencias de importancia:

1) La estructura general de los problemas (las cantidades y sus relaciones) son las mismas que la de los problemas que se plantearon inicialmente, es decir, el de Cambio aumentando (final desconocido) y Combinación (todo desconocido). Por ello, la formulación lingüística emplea muy parecidos términos y no constituye una pista fiable para descubrir la operación que resuelve el problema.

2) No es posible realizar el "modelado directo" de los momentos planteados en estos problemas. En el de Cambio, por ejemplo, disponer de cinco canicas inicialmente permite colocar cinco fichas sobre la mesa. La siguiente afirmación, sin embargo, 'gana varias canicas' no permite colocar la cantidad de canicas ganadas al lado de las anteriores y el "modelado directo" se interrumpe.

En lo que se refiere a estrategias acertadas que permitan resolver estos dos problemas existen varias posibilidades que excluyen la aplicación directa de una sustracción.

1. "Contar a partir de lo dado".- Se representa la cantidad menor (cinco en el problema de Cambio aumentando, cuatro en el de Combinación) y a continuación se a½aden nuevos elementos hasta conseguir representar la cantidad mayor (ocho y siete, respectivamente). Contando los elementos a½adidos se tiene la respuesta. Aunque esta estrategia respeta aparentemente la secuencia de momentos descritos en los problemas no resulta ser de "modelado directo" por cuanto el ni½o tiene que hacer un conteo junto a una comparación: A½adir elementos que se van contando comparando el total de elementos

Actividad 8

El tipo de palabras empleadas en la formulación del problema resultan de una gran importancia en la elección de la operación que lo resuelve. De hecho, una de las distinciones fundamentales entre los resolutores de problemas expertos y principiantes reside en el hecho de que los primeros se guían en la resolución por las características estructurales, las relaciones lógicas, del problema mientras que los principiantes eligen la operación en base a características superficiales como pueden ser las palabras. Estas adoptan entonces el papel de 'palabras-clave' en la elección de la operación.

Con base en lo dicho analiza entonces las palabras empleadas en los problemas anteriores justificando que un ni½o de las respuestas 'trece' y 'once' a los dos problemas. óEs posible formular los problemas lingüísticamente de otra manera que permita una mayor facilidad de comprensión por el alumno principiante?. Compara tus respuestas con las de tus compa½eros.

constantemente con al cantidad mayor que se desea representar.

2. “Separar a”.- Se representa la cantidad mayor (ocho y siete) y sobre ella, comenzando por el principio, la cantidad menor (cinco y cuatro, respectivamente). Contando los elementos restantes se alcanza la respuesta.

Sin embargo, las estrategias acertadas pueden también ser directamente sustractivas, como en el caso siguiente:

1. “Contar hacia atrás”.- Esta es una estrategia fundamentalmente verbal por la que el ni½o cuenta desde la cantidad mayor hasta llegar a la cantidad menor. Así, en el problema de Cambio podría contar diciendo ‘ocho, siete, seis, cinco’. En este caso, la respuesta ‘tres’ se basa en el conteo paralelo realizado sobre el número de palabras numéricas que es necesario pronunciar hasta llegar a la cantidad menor. En otras palabras, nuevamente se realiza un doble conteo y una comparación sucesiva en cada momento del conteo respecto a la cantidad menor que se debe alcanzar.

La realización de una estrategia directamente sustractiva como la anterior muestra que el alumno es capaz de transformar el problema cuya estructura es aditiva en otro sustractivo. De todos modos, las razones dadas justifican la mayor dificultad en la realización de estos problemas respecto de los primeros y por qué su resolución se retrasa hasta el nivel de Primaria.

2.5 Problemas de Cambio con el comienzo desconocido

Actividad 9

Formular un problema de Cambio disminuyendo (cambio desconocido). Siendo su estructura sustractiva así como las palabras empleadas en su formulación óqué operación lo resuelve?. óQué estrategias de las expuestas hasta ahora serán más adecuadas en su resolución?.

Cambio aumentando (comienzo desconocido)

Un ni½o tiene varias canicas al comenzar el juego. Luego gana tres canicas. Al final tiene ocho canicas. óCuántas tenía al principio?.

En este caso un ni½o que esté limitado a estrategias de “modelado directo” no podría representar el conjunto inicial del que no se precisa la cantidad. A continuación gana tres canicas que coloca encima de la mesa. Al final, se le dice, tiene ocho canicas que procederá a colocar al lado de las tres anteriores. Dado que las palabras-clave están asociadas a la adición (‘gana’) sumará tres y ocho para dar la respuesta ‘once’. Por ello, nuevamente, este problema encierra una mayor dificultad que el primero de Cambio aumentando que se planteó.

Pero además resulta más complejo de resolver que el mismo problema con el cambio desconocido, que aparentemente es similar. En efecto, cuando es el cambio lo que se desconoce ya se dispone del conjunto inicial y sólo hace falta una transformación de la operación (contar hacia atrás en vez de hacia delante). Pero cuando la incógnita es la cantidad inicial no sólo habrá que transformar la operación sino que se aplicará la conmutatividad de la suma.

Actividad 10

La ense½anza tradicional de la adición y sustracción sostenía que la segunda debía ser posterior a la primera por cuanto la sustracción se definía a partir de la adición como inversa de la misma. De entre el conjunto de problemas ya estudiado y los que vendrán a continuación ordena en dificultad todos ellos a partir de las estrategias que los resuelven y sus características estructurales, independientemente que sean resolubles por la suma o la resta. óResulta un ordenamiento semejante al de la ense½anza tradicional? Dicho de otra manera, óexisten problemas resolubles con la resta más sencillos que otros resolubles con la suma?.

En efecto, desde una estrategia aditiva se dispondrán ocho elementos y mediante “separar de” se retirarán tres elementos finales. Los que quedan representarán al conjunto inicial. En este caso, los tres elementos del cambio actuarán en el mismo papel que los del mismo conjunto inicial. Desde esta perspectiva, estos problemas de Cambio resultan los más complicados de resolver.

2.6 Problemas de Comparación

Dentro de las variadas situaciones donde se pueden plantear problemas resolubles por la adición o sustracción, aún queda la última, caracterizada por el hecho de que se comparen estáticamente dos cantidades dadas. Las dos cantidades se dan simultáneamente (al contrario que en la situación de Cambio) y las dos no corresponden a dos conjuntos incluídos en un todo (con lo que se diferencian de los de Combinación). Un ejemplo de tales problemas sería el siguiente:

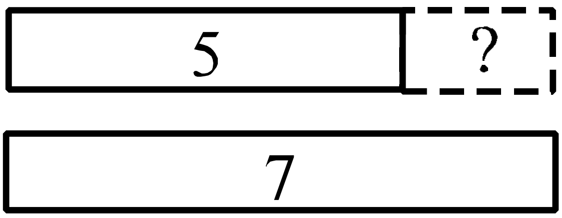
Actividad 11

Formula un problema de Cambio disminuyendo (comienzo desconocido), analiza sus características y discute con tus compa½eros las estrategias más adecuadas para su resolución por un ni½o de Primaria.

Comparación (diferencia desconocida)

Pedro tiene siete lápices y
Carmen tiene cinco lápices.
óCuántos lápices tiene Pedro más
que María?.

Su representación esquemática podría ser la siguiente:



Cuando se dispone de un material con el que representar los elementos del problema la resolución se apoya en una estrategia de “Emparejamiento”, consistente en asignar un lápiz del conjunto de Pedro a un lápiz del conjunto de Carmen y sólo a uno. Con el emparejamiento de lápices subsiguiente la diferencia es fácil de apreciar sin más que contar los lápices no emparejados, en este caso los dos lápices sobrantes de Pedro.

Sin embargo, la ausencia de material revela unas profundas dificultades infantiles para comprender lingüísticamente los términos del problema. La falta de comprensión lleva a dar una respuesta como ‘doce’ en base a la presencia de la palabra ‘más’ que actúa como clave de la operación a aplicar. En este sentido se ha comprobado que, en los primeros a½os de Primaria, existe una mejor comprensión del término relacional ‘más que’ respecto al término ‘menos que’.

La estrategia más habitual para resolver acertadamente este problema reside en contar a partir del número menor hasta obtener el mayor, es decir, la de “Contar a partir de lo dado”. Al igual que la disponibilidad de material para representar los elementos del problema favorece el acierto del ni½o, también lo hace una formulación lingüística distinta del problema:

Pedro tiene siete lápices y Carmen tiene cinco lápices. óCuántos lápices hay que dar a Carmen para que tenga los mismos que Pedro?

Este problema se denomina de ‘Igualación’ dado que la acción que lo resuelve y que se demanda en la pregunta planteada consiste en igualar la cantidad mayor a½adiendo una cantidad desconocida a la menor. Los dos problemas no sólo muestran una distinta formulación lingüística sino que son realmente diferentes: En el de Comparación se dan dos cantidades y se pide una comparación estática entre ellas mientras que en el de Igualación se demanda una transformación de una cantidad en otra, adoptando así un carácter dinámico que lo asemeja a los problemas de Cambio aumentando (cambio desconocido). La similitud entre ambos problemas de Comparación es debida a que se inscriben dentro de la misma situación.

Naturalmente, la incógnita puede ser cualquiera de las dos cantidades dadas en el problema de Comparación surgiendo de esta manera dos problemas diferentes, según que sea conocida o no la cantidad que sirve de referencia a la comparación:

Comparación (referente desconocido)

Pedro tiene siete lápices. Pedro tiene dos lápices más que Carmen. óCuántos lápices tiene Carmen?.

Comparación (referente conocido)

Carmen tiene cinco lápices. Pedro tiene dos lápices más que Carmen. óCuántos lápices tiene Pedro?.

Actividad 12

El problema de Comparación (referente conocido) es más sencillo de resolver que el de referente desconocido. óPor qué? óQué estrategia resolverá preferentemente cada uno?. óQué características estructurales los diferencian y justifican la adopción de distintas estrategias para resolverlos?.

Un cuadro general de todos los problemas aditivos y sustractivos sería el siguiente:

Situación	Problema general	Variación incógnita	Operación aplicable
Cambio	Cambio aumentando	Final desconocido	Adición
		Cambio desconocido	Sustracción
		Comienzo desconocido	Sustracción
	Cambio disminuyendo	Final desconocido	Sustracción
		Cambio desconocido	Sustracción
		Comienzo desconocido	Adición
Combinación	Combinación	Total desconocido	Adición
		Parte desconocida	Sustracción
Comparación	Comparación	Diferencia desconocida	Sustracción
		Referente conocido	Adición
		Referente desconocido	Sustracción

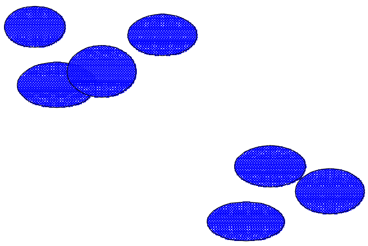
3. Representación de las operaciones de adición y sustracción

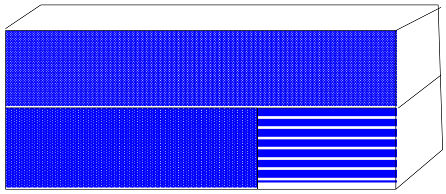
3.1 Materiales para el modelado del problema

La estrategia inicial por excelencia de la que dispone un ni½o cuando afronta un problema cualquiera de los abordados antes es la del “modelado directo”. En ella se representa con material u otros elementos manipulables cada una de las cantidades y acciones del problema según vienen dadas en su texto. Para hacer tal forma de representación de tipo manipulativo no todos los materiales son igualmente aconsejables.

Si se consideran las operaciones de adición y sustracción como objetos didácticos se han de tomar como operaciones que reflejan acciones propias de una situación destinadas al aprendizaje del alumno. Por ello no basta que un material manipulativo sea adecuado para resolver el problema sino que debe hacer ver con la mayor claridad posible las cantidades y acciones propias del problema en la situación en que se inscribe. Esta propiedad de cualquier forma de representación de hacer ver al resolutor con facilidad los elementos del problema se llama ‘transparencia’ de la representación.

En este sentido no todos los materiales son igualmente transparentes para estos elementos del problema (cantidades, acciones). Veamos algunos casos.

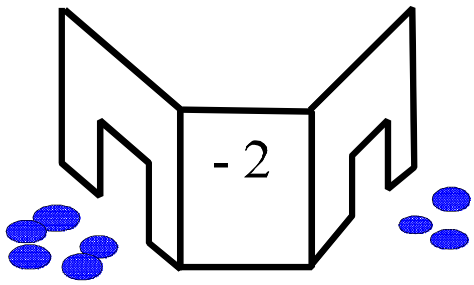


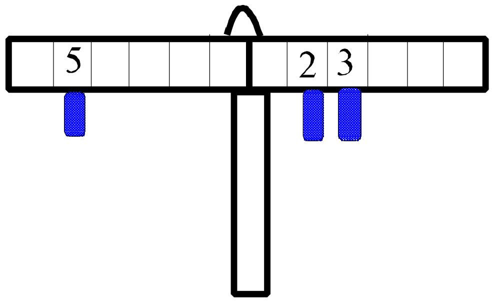


Se han representado dos materiales de uso bastante común para representar la acción de a½adir, en este caso, cuatro y tres elementos. A la izquierda se consideran fichas como las de cualquier juego infantil mientras que a la derecha se muestra la composición de dos regletas Cuisenaire o regletas de colores. La acción de a½adir, juntar, se hace ver con cierta claridad en ambos casos pero no así cuando se consideran las cantidades. Las fichas son más transparentes para la representación de cantidades correspondientes a magnitudes discretas (canicas, frutas, pesetas) mientras que las regletas resultan más transparentes en lo que se refiere a magnitudes continuas (longitud, peso, por ejemplo). La utilización de un material manipulativo con características continuas para representar cantidades de una magnitud discreta y viceversa causa una mayor dificultad en el modelado de los elementos del problema.

Pero algo similar sucede con las acciones del problema. Los dos siguientes materiales ilustrarán este caso. A la izquierda se ha representado la máquina operadora de Dienes en la que se introducen distintas cantidades por la ‘entrada’, se a½aden o sustraen elementos según la cantidad marcada en el frontal y el resultado sale por la ‘salida’. A la derecha se muestra otro material algo más sofisticado, la balanza numérica que está formada por dos brazos descritos numéricamente de donde se cuelgan pesos iguales a distancias variables. Este material no sólo es sofisticado por su dificultad de construcción sino por el conocimiento de los principios básicos de la balanza que requieren para la adecuada comprensión de la acción realizada, principios no siempre al alcance de los ni½os de los primeros a½os de Primaria.

Los problemas se encuentran inscritos en situaciones. Estas situaciones están caracterizadas, en su aspecto estructural, por las acciones que le son propias (cambiar, combinar o comparar). Pues bien, estos dos materiales son transparentes de distinta forma según la acción de que se trate.





La máquina operadora es transparente para los problemas en situación de Cambio por cuanto se dispone de una cantidad inicial que sufre un cambio posterior alcanzándose un resultado final por último. La misma acción en la balanza numérica sería bastante más opaca. En un brazo se colocaría la entrada (5) y en el otro la cantidad a sustraer (2). El desequilibrio producido sólo se restablecería con un peso colocado en la longitud correspondiente al tres.

3.2 Representaciones más abstractas: Dedos, dibujos y palabras

Actividad 13

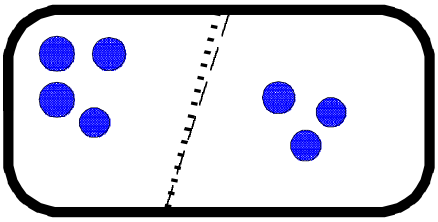
La balanza numérica permite representar problemas de Comparación siendo muy transparente cuando la diferencia es desconocida. Realiza algunos ejemplos ampliando las posibilidades de este material a otros problemas de Comparación. óEs también transparente respecto a estos problemas nuevos?.

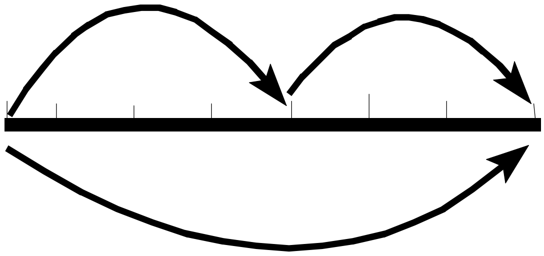
En un momento del desarrollo infantil las acciones ejercidas sobre los materiales manipulativos se van interiorizando progresivamente. Sin embargo, sea por el hecho de que éste es un proceso progresivamente constructivo o sea por las limitaciones de la memoria infantil, el ni½o precisa una apoyatura perceptiva en las actividades de conteo progresivo o regresivo que realiza. De esta manera va prescindiendo paulatinamente de los materiales, estos empiezan a constituir sólo un recurso más disponible esporádicamente (en razón de la complejidad del problema) y el ni½o representa las cantidades y acciones del problema extendiendo y flexionando los dedos. Los dedos se van constituyendo así en los sustitutos de las fichas, de las regletas, etc., en la representación de las unidades que constituyen cada cantidad.

Este uso de los dedos que durante cierto tiempo no se debe limitar va paralelo a la creciente necesidad de representar gráficamente los elementos del problema, sea a través de marcas en el papel que ayuden a recordar y representar externamente la cantidad a considerar, o por medio de diversos dibujos el más conocido de los cuales es el diagrama de Venn o la linea numérica.

Existe aún un tercer diagrama que es el que se ha utilizado a lo largo del capítulo en la representación de los problemas de Cambio, Combinación y Comparación. Su utilización favorece la distinción entre las diversas situaciones a que hemos hecho referencia. En la medida, pues, en que el ni½o se encuentre al comienzo de su aprendizaje con la necesidad de realizar esta distinción entre situaciones los diagramas citados serán transparentes.

Sin embargo, es un hecho a destacar el que la representación mental de los elementos del problema va construyéndose por parte del ni½o a partir de estas situaciones. Y que esta representación se enriquece estructuralmente con las cantidades y sus relaciones, relaciones que comienzan a hacerse reversibles (con lo que es posible hacer la transformación inversa de la adición y sustracción) e intercambiables (con la aplicación de la propiedad conmutativa de la adición).





De este modo, lo que comenzaban siendo situaciones de Cambio, Combinación y Comparación se van tornando en situaciones de adición y sustracción por una aplicación sistemática del esquema parte/todo. Según dicho esquema todos los problemas de cualquiera de las situaciones planteadas son reducibles a dos tipos de relaciones:

1. Se pueden conocer las dos partes ignorándose el todo, en cuyo caso se estará ante un problema resoluble por la adición.

2: Se puede conocer, por otro lado, tanto el todo como una de sus partes siendo la otra parte la incógnita. En este caso el problema será resoluble por la sustracción.

Sólo cuando este esquema refleja adecuadamente la representación mental que tiene el alumno de las diversas situaciones presentes en los problemas planteados se puede hablar de que estamos ante problemas de suma y de resta. Este enriquecimiento progresivo de naturaleza estructural de las relaciones presentes en la representación infantil es la principal razón por la que, desde el punto de vista didáctico, se recomienda el tratamiento de todas las situaciones en el nivel de Primaria. Una metodología de ense½anza apoyada en la reducción de los problemas a sus tipos más sencillos (susceptibles de “modelado directo”) conlleva unas limitaciones considerables en la construcción del esquema parte/todo y su falta de aplicabilidad a otros problemas que los dados en su aprendizaje.

Con la adquisición paulatina del esquema parte/todo los diagramas antes aludidos (diagrama de Venn, linea numérica) adquieren toda su potencialidad dado que su carácter abstracto los ponen lejos de la comprensión inicial. En otras palabras, si un ni½o está limitado en su resolución a aquellos problemas susceptibles de “modelado directo” sería incapaz de comprender las relaciones abstractas implicadas en estos diagramas: Que la adición o sustracción se representen, por ejemplo, a través de un salto sucesivo entre puntos de una linea numérica es poco transparente en estos ni½os. Sólo cuando mentalmente empiezan a manejarse relaciones abstractas entre cantidades y se van interiorizando las acciones presentes en el problema, los diagramas de este tipo van ganando en trasparencia. Y una de las se½ales de este progresivo carácter abstracto es la utilización de los dedos, así como las palabras numéricas (vocales o subvocales).

Este proceso no es inmediato sino que el ni½o va utilizando de forma combinada todas estas formas de representación. Se puede apreciar en el siguiente ejemplo:

Pregunta.- Juan tiene cinco comics. En su cumplea½os le dan varios más de manera que al final tiene nueve comics. óCuántos le dieron en su cumplea½os?.

Respuesta.- (Extiende los cinco dedos de su mano izquierda) Uno, dos, tres, cuatro, cinco. óCuántos le dan?.

P.- Al final tiene nueve comics.

R.- (Mirando primero su mano izquierda) Cinco. (Mira luego la derecha en la que va extendiendo los dedos al tiempo que subvocalmente pronuncia ‘Seis, siete, ocho, nueve’ acompa½ándolo con gestos de la cabeza). 4Cuatro!.

P.- óPor qué?
R.- Porque cinco y cuatro son nueve.

3.3 Representaciones simbólicas

La representación escolar por excelencia de la suma y de la resta viene a ser la representación simbólica. Las variaciones históricas sufridas por los símbolos aritméticos, tanto de las cifras como de los correspondientes a las acciones y la igualdad, revelan con claridad que estos símbolos surgen como fruto de una cultura determinada por extensa que sea, consecuencia de un convenio histórico. Ello hace que los ni½os que son introducidos en la escuela en el manejo de estos símbolos los vean como algo arbitrario, como un código de difícil aprendizaje que les permite comunicar a otros y entender lo que otros les dicen en cuanto a un determinado contenido matemático.

De este hecho deriva la considerable importancia que ha ido adquiriendo en la ense½anza de las matemáticas la comunicación al profesor y a otros compa½eros de los contenidos matemáticos por la forma de representación que sea más conveniente (de forma verbal, gráfica, simbólica). La utilización de símbolos es la culminación del proceso de abstracción que comienza con los materiales manipulativos y, por ello, aunque facilite la expresión de las relaciones de un problema aritmético, encierran el peligro de que se constituyan como representaciones opacas de los elementos del problema, tanto más cuanto que su representación no se basa en el parecido sino en un convenio estrictamente cultural.

A ello hay que a½adir una observación como la formulada por el informe Cockcroft (1985):

> Se nos ha se½alado que, aun guiados por las mejores intenciones, algunos padres ejercen una presión perjudicial sobre los profesores para que introduzcan las matemáticas escritas, especialmente las "sumas", en una etapa demasiado precoz, porque consideran que tal habilidad constituye un signo inequívoco de los progresos del ni½o (pág. 110).

óCómo pueden ganar en transparencia las representaciones simbólicas?. Muchos profesores consideran que los símbolos son abreviaturas de expresiones verbales y escritas de manera que siguen un proceso como

Cuatro y tres son siete
4 y 3 son 7
4 + 3 son 7
4 + 3 = 7

Esta forma de introducción puede ser acertada a condición de que no se olvide que los símbolos son representaciones de acciones (+ , -) o de una comparación (=) y que si estas acciones y comparación subsiguiente no se ha comprendido difícilmente esta introducción a los símbolos dejará de ser otra cosa que una rutina escolar más sin significado para el ni½o.

El hecho de disponer únicamente de dos representaciones simbólicas para la adición y sustracción del tipo

a + b =   a - b =

encierra desde el punto de vista didáctico un peligro que resume acertadamente Hughes (1986):

> El espacio vacío o el recuadro que aparece a la derecha del signo de " = " indica al ni½o que su tarea consiste en completar la ecuación. Así, apenden que " = " significa "haz algo del lado izquierdo, y coloca la respuesta del lado derecho". Lo que deba hacer depende de lo que aparece a la izquierda. Si hay un signo " + " el problema consiste en "sumar", y los dos números tienen que sumarse. Si hay un signo " - " se trata de "quitar" y es preciso restar un número (normalmente el más bajo) del otro. El ni½o adquiere así ciertos significados muy específicos con respecto a los operadores " + ", " - " e " = ", y estos signos no se verán con facilidad como representaciones de acontecimientos o relaciones

> entre objetos concretos, sino que el ni½o los considerará como estímulos para “hacer algo” en los números que hay a su lado (pág. 142).

Sin embargo, estas representaciones simbólicas (denominadas ‘canónicas’) no son las únicas disponibles. Si consideramos un problema de Cambio aumentando con el cambio desconocido, el problema se puede representar por:

$$a + \quad = c$$

y si el problema tuviera el comienzo desconocido, su representación simbólica podría ser

$$+ b = c$$

Estas representaciones ‘no canónicas’ resultan más transparentes para describir las relaciones del problema de Cambio aumentando: En el primer caso, se dispone de una cantidad a que se incrementa en una cantidad desconocida para resultar en una cantidad c. Los símbolos c - a = representarían el proceso de resolución (siempre que fuera sustractivo) pero no el planteamiento del problema. Teniendo en cuenta que durante cierto tiempo la estrategia que resuelve este problema no sería sustractiva sino aditiva (“Separar a” por ejemplo) se puede comprender que la representación no canónica es más transparente que la canónica en la expresión de los términos del problema.

3.4 La memorización de hechos numéricos básicos

La estrategia más elaborada y abstracta en la resolución de un problema aritmético de tipo aditivo o sustractivo la constituye la memorización de hechos numéricos básicos, fundamentalmente las sumas y restas de dos dígitos. Esta memorización es recomendable favorecerla con ejercicios específicos como el bingo, en el que la rapidez de la respuesta es importante.

Para constuir este bingo, se recortan cartulinas donde figure el resultado de las sumas de dos dígitos, convenientemente repartidos (del 0 al 18). En una bolsa se tienen fichas con los dígitos del 0 al 9, extrayéndose dos veces sucesivas una ficha cada vez. En la cartulina habría que tachar la suma de los dos números extraídos que los ni½os calcularan mentalmente.

Ejercicios de este tipo deben favorecer la memorización de estos hechos numéricos básicos, aprendizaje de considerable importancia para el desarrollo posterior del cálculo mental y la realización de todo tipo de algoritmos. Sin embargo, hay un aspecto más que conviene rese½ar y que concierne a otro de los objetivos básicos de la didáctica de las matemáticas en Primaria: El desarrollo del sentido numérico. Consiste éste en la capacidad de utilizar y operar números con la flexibilidad necesaria y apoyándose en su conocimiento del sistema de numeración decimal.

Ello se observa en la realización de sumas y también de restas que permiten su descomposición en partes. Veamos algunos ejemplos de técnicas que utilizan este sentido numérico:

a) “Dobles”.- Es un hecho constatado que la suma de un dígito consigo mismo requiere un tiempo menor de recuperación de la memoria que la suma de dos dígitos distintos. Con ello es conveniente potenciar el cálculo de ‘dobles’ como resultado especialmente sencillo y como fundamento de otras técnicas algo más elaboradas.

b) “Dobles más/menos uno”.- Precisamente cuando se plantean sumas como 5 + 4 , 6 + 7 donde uno de los dígitos supera al otro en una unidad, hay ni½os que espontáneamente realizan dobles del número menor sumándole después uno, o bien dobles del número mayor restándole al resultado una unidad, como en

$$5 + 4 = (4 + 4) + 1 = (5 + 5) - 1$$

c) “Dobles más/menos dos”.- No es tan habitual pero algunos alumnos son capaces de descomponer los sumandos cuando uno de ellos supera al otro en dos unidades:

$$8 + 6 = (6 + 6) + 2 = (8 + 8) - 2$$

d) “Compensación”.- Esta técnica consiste en aumentar uno de los dígitos disminuyendo en la misma cantidad el otro dígito al objeto de que resulte una suma de más fácil recuperación. De esta manera, el caso anterior también se podía plantear como

$$8 + 6 = (8 - 1) + (6 + 1) = 7 + 7$$

aunque resulta especialmente frecuente cuando la suma a realizar excede de la decena y, en particular, si uno de los sumandos es cercano a tal decena:

$$9 + 5 = (9 + 1) + (5 - 1) = 10 + 4$$

Esta compensación no es igualmente aplicable al caso de las sustracciones, algunas de las cuales son fácilmente memorizables como la que se apoya en el uso ‘inverso’ de los dobles: 8 - 4, 6 - 3, etc. En el caso de la “compensación” se pueden a½adir las mismas unidades a ambos dígitos para reducirlos a casos más fácilmente recuperables de nuevo:

$$9 - 5 = (9 + 1) - (5 + 1) = 10 - 6$$

En lineas generales es complicado prever todas las posibilidades de cálculo mental por parte de grupos dispares de ni½os de Primaria. Las actividades de ense½anza deben favorecer la aparición en los alumnos de este tipo de técnicas, fácilmente imitables entre compa½eros de un mismo nivel, a través de discusiones en clase y con una actitud de admisión por el profesor de respuestas distintas pero acertadas igualmente al mismo problema planteado.

Cuestiones

1.- Revisar algunos libros de texto recientes que correspondan al último curso de Educación infantil y primer curso de Educación primaria analizando la forma de introducción y ejercicios propugnados en torno a la adición y sustracción. En concreto, registrar y discutir:

- Los tipos de situaciones planteadas con preferencia. óHasta qué punto existe variedad en su planteamiento?.
- Las diferencias que a este respecto se observan entre los dos niveles educativos.
- Las formas de representación utilizadas fundamentalmente y el modo en que se presentan.

2.- Si se contrastan los libros de texto propios de la antigua E.G.B. con los actuales óqué se puede deducir de los principios educativos que subyacen a ambas propuestas? óQué diferencias existen en cuanto a las situaciones presentadas, las representaciones utilizadas y el nivel de abstracción propuesto en sus actividades?.

3.- Formula diversos problemas de Cambio aumentando y disminuyendo variando la incógnita. óQué estrategias infantiles son aplicables en cada caso?. El tama½o de los números en juego, ópuede condicionar la estrategia escogida como preferente?. Si fuera así, ócómo influye de manera general el tama½o de los números y la diferencia entre ellos en el momento de realizar conteos hacia adelante y detrás en la resolución de estos problemas?. Discute y razona tu respuesta.

4.- Revisa cuadernillos de problemas de adición y sustracción elementales extrayendo de entre ellos una lista de palabras-clave que vienen asociadas a las dos operaciones. óExisten casos en que las palabras-clave utilizadas contradicen la operación que resuelve el problema?. Si fuera así, óen qué tipo de problemas sucede esto?.

5.- Formula un problema de Cambio disminuyendo (cambio desconocido) y otro de Combinación (parte desconocida). Reformula lingüísticamente estos problemas de formas diferentes analizando las posibles dificultades de comprensión que pueden acarrear a un alumno de Primaria.

6. Considerando la totalidad de problemas resolubles por la adición y sustracción, estudia y discute una ordenación de los mismos en dificultad considerando tanto la operación que lo resuelve como el tipo de estrategia preferente que le es aplicable.

7.- Considérense los dos siguientes problemas:

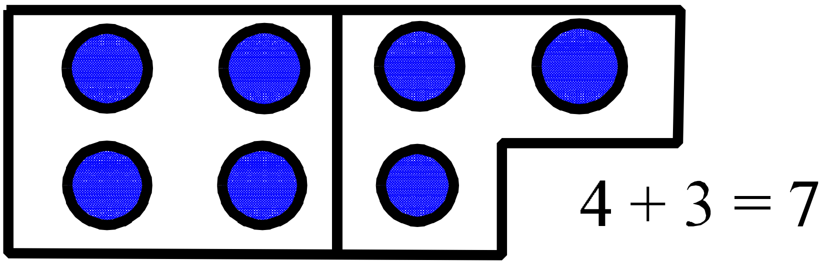
a) Santiago tiene 8 canicas. Jorge tiene 5 menos que Santiago. óCuántas canicas tiene Jorge?.

b) Santiago tiene 8 canicas. Tiene 5 más que Jorge. óCuántas canicas tiene Jorge?.

El primero se dice que tiene un ‘lenguaje consistente’ mientras que el segundo muestra un ‘lenguaje inconsistente’. óEn qué consiste esta diferencia?. Formular problemas de Comparación resolubles por la adición en los mismos dos tipos de lenguajes. óPor qué los problemas con lenguaje inconsistente se realizan peor que los de lenguaje consistente?. Razona tu respuesta.

8.- Con un material como las regletas Cuisenaire la sustracción se representa considerando ‘qué regleta le falta a la del sustraendo para igualar la del minuendo’. óQué transparencia tiene este material respecto a

la sustracción?. óQué tipo de problema sustractivo resulta especialmente transparente con este material?.
9.- óCómo se representaría con la máquina operadora de Dienes los problemas de Cambio donde la incógnita la constituyese el propio cambio o el conjunto inicial?. óCómo se resolvería tales problemas? Este material ósería transparente en estos casos o habría otros que dejaran ver mejor los elementos de cada problema?.
10.- Dise½a una serie de actividades de descomposición de un número en varios sumandos o en minuendo



y sustraendo a través de la balanza numérica. óQué posibilidades da este material cuando se utilizan dos tipos de pesos, uno doble que el otro?.
11.- Un material de cierto uso, particularmente en Educación infantil, es el de las plaquetas de puntos. Un caso de adición se representaría colocando dos plaquetas consecutivas y comparándolas con la plaqueta entera de forma similar. La sustracción, en cambio, se representaría superponiendo la plaqueta del sustraendo sobre la del minuendo observando lo que queda. óQué transparencia tiene este material para los distintos tipos de problemas?. óQué ventajas e inconvenientes puede tener su uso en el aula?.

12.- Muchos resolutores de problemas tienden a dibujar un diagrama antes de intentar resolverlo. óDe qué forma este hecho favorece el aprendizaje?. Desarrolla algunos ejemplos al respecto. óSon todas las representaciones gráficas necesariamente útiles o algunas pueden representar un obstáculo en el aprendizaje? óPor qué?.
13.- El símbolo " + " aparece también en las ambulancias con un significado muy distinto al dado en aritmética. Observando tu entorno relaciona en qué contextos y con qué significados se utilizan los símbolos aritméticos de la adición, la sustracción y la igualdad. óSon frecuentes estos usos cotidianos? óTienen un significado inequívoco?.
14.- Analiza qué problemas aditivos y sustractivos admiten expresiones simbólicas no canónicas. Coloca junto a ellas las representaciones simbólicas que resuelven el problema directamente y describe los cambios existentes entre ambas expresiones. óQué tipo de transformaciones existen en cada caso entre las dos clases de representaciones simbólicas?. óRevelan estas transformaciones la dificultad de resolución del problema?.

Lecturas recomendadas

Bermejo, V. (1990): *El ni½o y la aritmética.* Paidós, Barcelona.
Kamii, C.K. (1985): *El ni½o reinventa la aritmética.* Visor, Madrid.
Maza, C. (1991): *Ense½anza de la suma y la resta.* Síntesis, Madrid.
Maza, C. (1995): *Aritmética y representación.* Paidós, Barcelona.

Bibliografía

Cockcroft (1985): *Las Matemáticas sí cuentan.* M.E.C., Madrid.

Hughes, M. (1986): *Los ni½os y los números.* Planeta, Barcelona.
Vidal, S. (1909): *Aritmética.* Sucesores de Hernando, Madrid.