Dirección General de Cultura y Educación

Buenos Aires LA PROVINCIA

Subsecretaría de Educación

Dilección Provincial de Educación Primaria

Dilección de Gestión Curricular

"Mejorar los aprendizajes"

Área: MATEMÁTICA

Autora: Inés Sancha
Coordinación: Andrea Novembre

Equipo técnico:
Teresita Chelle, Patricia García, Gloria Robalo, Inés Sancha, María Cecilia Wall
Andrea Novembre (coord.)

Introducción:

Agradecemos a:

Sofía Nielsen, Mariela Novembre y Viviana Novembre por su lectura crítica.
Ana Lía Crippa, Beatriz Moreno y María Emilia Quaranta.
Julia Noseda, Lautaro Kiel, Ramiro Kiel y a todos los niños que colaboraron con sus producciones.

Cálculo mental y algorítmico

Introducción

¿Qué es el cálculo mental? ¿Qué lo diferencia de los algoritmos de cálculo que siempre hemos enseñando? ¿Por qué en el diseño curricular se propone trabajar con cálculo mental antes de hacerlo con los algoritmos?

Veamos, en principio, las definiciones de cálculo mental y algorítmico:

> Cálculo Algorítmico: *serie de reglas aplicables en un orden determinado, independientemente de los datos, que garantizan alcanzar un resultado en un número finito de pasos.*
>
> Cálculo mental: *conjunto de procedimientos que, analizando los datos por tratar, se articulan sin recurrir a un algoritmo pre-establecido para obtener resultados exactos o aproximados.*

Es decir, los algoritmos permiten operar sin reparar en los números con los que se está calculando. Sólo se trata de seguir los pasos que aseguran llegar al resultado correcto si no se comete ningún error en el camino. En el caso del cálculo mental es necesario analizar cada caso en particular y buscar el modo más conveniente para operar. No hay reglas a seguir, cada caso es singular. Si el cálculo mental parece más trabajoso que el algorítmico, ¿por qué ocupa un lugar destacado en la enseñanza y en la didáctica? ¿A qué se debe su riqueza? En este escrito intentaremos abordar estas preguntas.

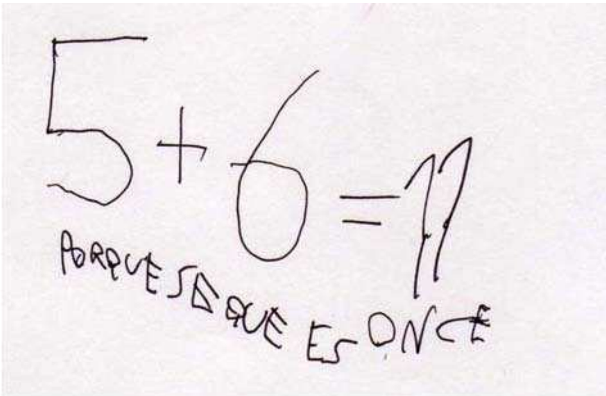
¿Por qué el cálculo mental?

El cálculo mental frecuentemente se asocia a la idea de una resolución oral y rápida. El tipo de cálculo que propone el Diseño Curricular no implica necesariamente "no escribir". Propone un trabajo que apunta, desde los primeros años de la Escuela Primaria, a que los alumnos aprendan a usar variadas estrategias para resolver cálculos mentales, a seleccionar la más conveniente de acuerdo con la situación y con los números involucrados, a verificar con una estrategia los resultados obtenidos por medio de otra, entre otros contenidos matemáticos.

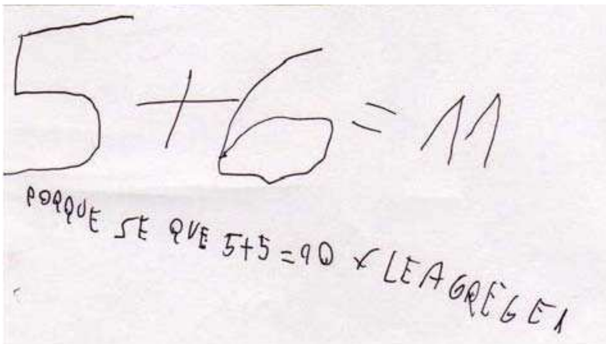
Desde sus primeros contactos con los números, los niños pueden hacer cálculos “en la cabeza”. Por ejemplo, si se les propone resolver el cálculo 5 + 6, algunos pueden hacer uso de sus dedos contando a partir de 5 o de 6, o de lápices utilizando el conteo para obtener 11. Otros pueden “guardar” el 6 en la cabeza y contar 5 más a partir de él: 7, 8, 9, 10 y 11, es decir usan el sobreconteo desde 6.

Veamos otras estrategias desplegadas por niños de 6 años:

Cuando se le pide a Lautaro que encuentre el resultado de 5 + 6, rápidamente responde que es 11. No necesita usar técnicas como las anteriores porque el cálculo a resolver se trata de un resultado conocido para él:

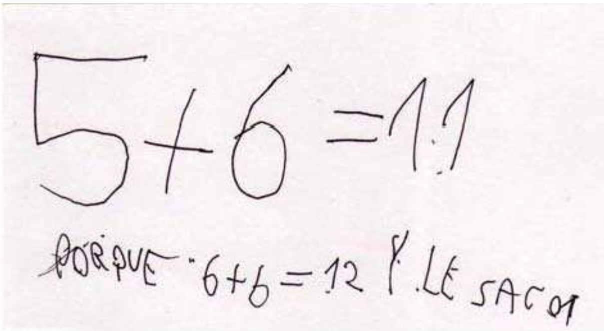


Frente a la pregunta de si conoce otra forma para encontrar el resultado, propone lo siguiente:



Lautaro dice: "5 + 6 = 11 porque sé que 5 + 5 = 10 y le agregué 1". Usa el cálculo conocido –y por lo tanto memorizado- 5 + 5 para obtener, a partir de él, el resultado de otro cálculo.

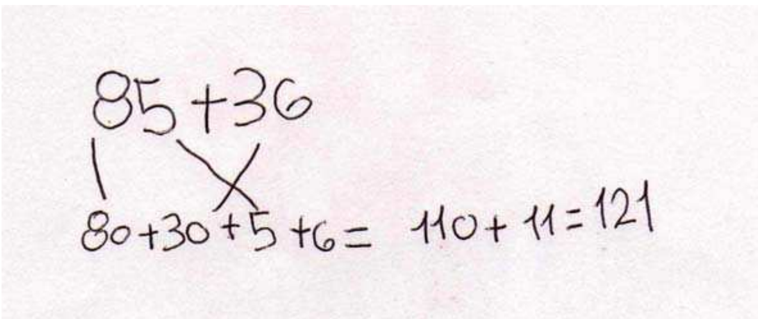
También encuentra otra manera de hallar 11:



Se apoya en otro cálculo conocido para encontrar el resultado buscado y afirma que 5 + 6 es 11 porque sabe que 6 + 6 es 12 y le saca 1.

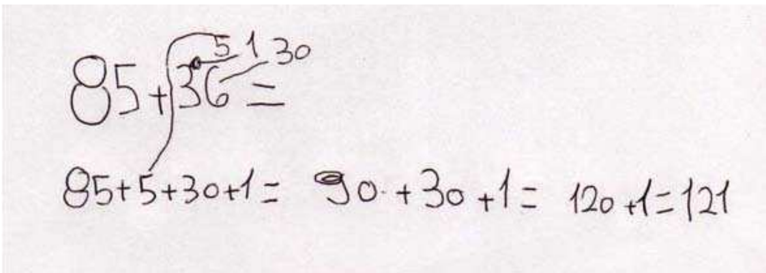
El conteo, el sobreconteo y el cálculo mental muestran que los niños pueden aproximarse al cálculo utilizando estrategias que representan diferentes niveles de conceptualización.

Algunos cálculos mentales exigen el uso del papel y lápiz para escribir las descomposiciones y los cálculos intermedios, permitiendo así controlar el sentido y guardar rastros de lo que se está haciendo. Por ejemplo, estos son diferentes procedimientos elegidos por niños de segundo año para resolver 85 + 36:

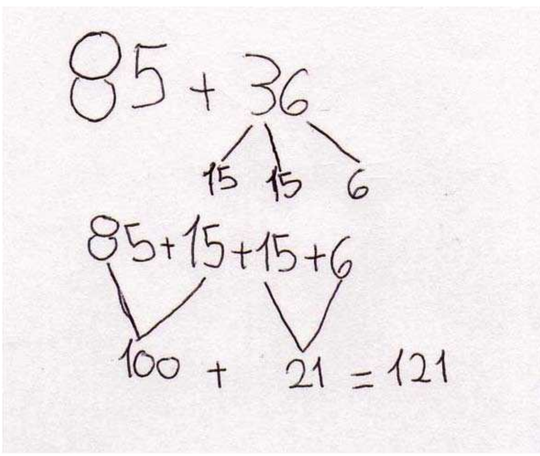


Este caso, por ejemplo, supone reconocer que 85 equivale a 80 +5 y 36 a 30 + 6. Luego, obtener el resultado 110 usando el cálculo memorizado 8 + 3 = 11 y apoyándose en conocimientos sobre las características y propiedades del sistema de numeración (si 8 + 3 = 11, entonces 8 dieces + 3 dieces = 11 dieces, que es 110); encontrar el resultado 11 sumando 5 + 6 a partir de un cálculo memorizado o de la descomposición 5 + 5 + 1, para finalmente sumar 110 y 11. Resulta interesante analizar que algunos niños, a partir de lo que conocen sobre la numeración, obtienen el resultado de 80 + 30 agregando ceros al cálculo 8 + 3 = 11. Detrás de la acción de agregar ceros existe un conocimiento sobre el valor de cada cifra dentro del número: *ocho dieces más tres dieces dan once dieces y once dieces es 110*.

Sin embargo, si se enseña a "agregar ceros" como una regla desvinculada del valor posicional, los niños pueden no encontrar el sentido de esta técnica. En tal caso, algunos podrían extender erróneamente esta regla para el caso en que se agreguen cifras que no sean ceros, como por ejemplo, si 8 + 3 = 11 entonces 8**1** + 3**1** = 11**1** ó 8**2** + 3**2** = 11**2**. Una regla que solo ha sido enunciada, para la que no se ha tenido la oportunidad de establecer las razones por las cuales es válida hace que no se pueda determinar su campo de validez. ¿Por qué solo sirve cuando se agregan ceros? El mero enunciado no lo responde.



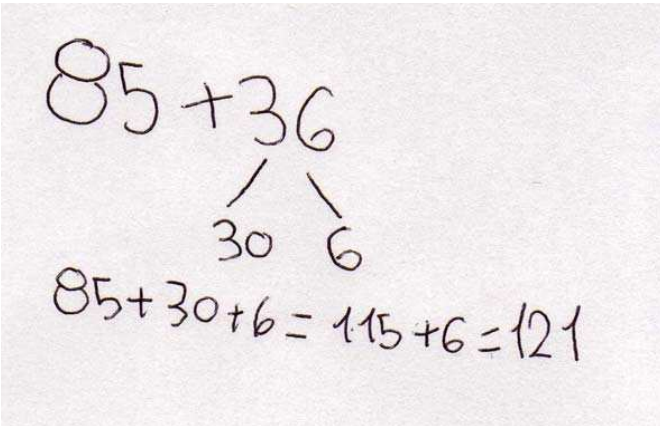
En este caso, el alumno busca una descomposición de 36 que le permita llegar a la decena superior a 85. Es así como surge el 5, el 1 y el 30 como forma de armar el 36.

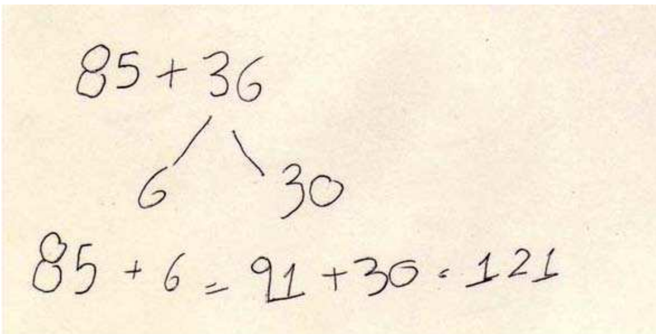


Esta niña se apoya en relaciones diferentes entre los números: buscar una descomposición del 36 que permita utilizar el complemento a 100 de 85, que es 15. Una posibilidad consiste en reconocer que 36 equivale a 30 + 6 y esta expresión a 15 + 15 + 6. Luego sumar 85 + 15 = 100 y 15 + 6 = 21 y finalmente 100 + 21 = 121:

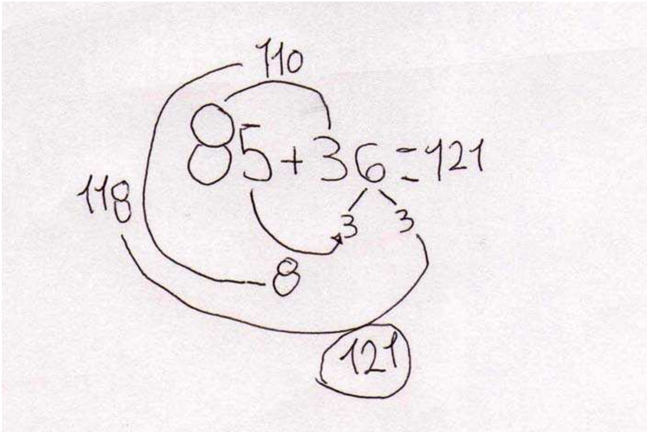
85 + 36 = 85 + 30 + 6
= 85 + 15 + 15 + 6
= 100 + 15 + 6
= 100 + 21
= 121

Si bien en los casos que siguen la descomposición de 36 que se usó es la misma, no resultó el mismo cálculo. En el primero de ellos la niña partió del resultado de 85 + 30, mientras que en el segundo, el niño primero encontró el resultado de 85 + 6.

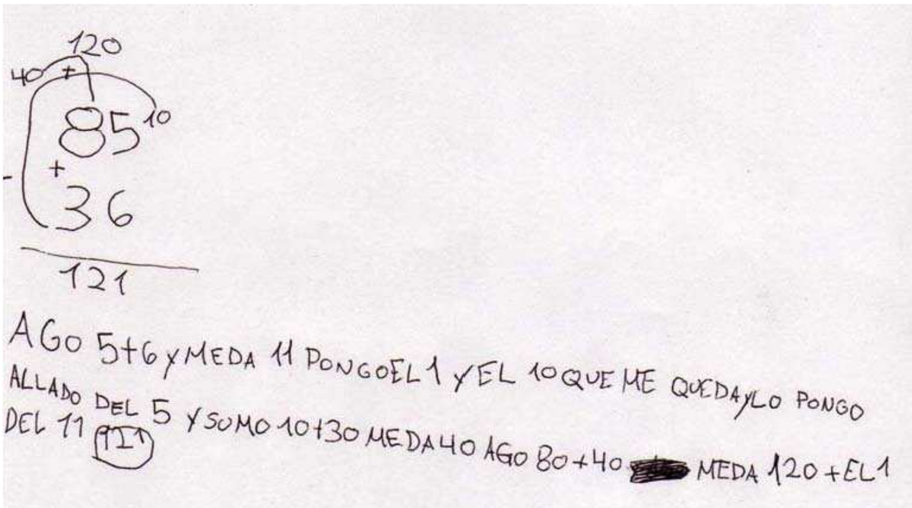




Esta forma de resolución, vinculada a descomposiciones de ambos números que la niña eligió según su conveniencia, se basa en los mismos principios y propiedades que los anteriores. La diferencia se encuentra en su presentación. Los arcos que la niña marca no son arbitrarios, sino muy precisos y señalan exactamente a los valores involucrados en cada cálculo.



Luego de resolver, explicó: *"Separé el 6 en 3 y 3. Sumé un 3 con el 5 y me dio 8. 80 más 30 es 110, más el 8, 118 y más el 3 que me quedó, 121".*



En este último caso, la resolución se encuentra en un punto intermedio entre el cálculo mental y el algorítmico. Julia opera "en vertical" pero explica: "Hago 5 + 6 y me da 11. Pongo el 1 y el 10 que me queda lo pongo al lado del 5 (ella aclara que es para no olvidarse) y sumo 10 + 30 (los une con un arco), me da 40 y hago 80 + 40. Me da 120, más el 1, 121."

Sus explicaciones muestran un amplio dominio de qué está haciendo en cada paso. Julia no dice "sumo ocho más tres más uno" sino "ochenta más cuarenta", mostrando que tiene muy claro el valor posicional de los dígitos y que, fundamentalmente, para ella, "llevarse uno" no ha sido un problema.

Las técnicas de cálculo que se utilizan dependen de los números que intervienen y de las relaciones que los alumnos hayan podido establecer entre esos números.

¿Qué sucedería al resolver este mismo cálculo con el algoritmo?

$$\begin{array}{r} 1 \\ 8\ 5 \\ \underline{+\ \ 3\ 6} \\ 12\ 1 \end{array}$$

Mientras lo resuelven, los niños suelen decir: *5 + 6 es 11, pongo 1 y me llevo 1. 8 más 1 que me llevé es 9, más 3, 12*. Son muy pocos los alumnos que pueden darle sentido al "me llevo 1".

¿Por qué, por ejemplo, se deja un dígito y el otro "se lleva"?
¿Por qué no puede ser al revés?
¿Por qué el número que "se lleva" tiene que sumarse y no hace que el 8 se convierta en un 18, por ejemplo?

Todas estas preguntas serían válidas para alguien que no tuvo la oportunidad de entender por qué hace lo que hace en cada paso del algoritmo. En realidad, quien resuelve un cálculo a través de un algoritmo no necesita hacerse preguntas porque éste funciona con la única condición de cumplir correctamente con todos los pasos predeterminados, no es necesario pensar en el significado de las acciones que se están realizando. Aquí es preciso establecer una distinción, si el niño solo aprendió el algoritmo, los cálculos parciales que realiza contradicen los conocimientos que ha adquirido sobre el sistema de numeración: suma 1, 8 y 3, obtiene 12 y lo ubica en la columna de los dieces. Por el contrario, si el alumno ha hecho un recorrido previo por el cálculo mental, llega a resolver el algoritmo sabiendo que lo que está sumando -aunque diga uno, más ocho, más tres- es un diez, ocho dieces y tres dieces, para obtener doce dieces, que equivalen a 120. Y como se trata de dieces, debe ubicarse en el lugar de los dieces.

El algoritmo, entonces, oculta propiedades porque ese es “su trabajo”, simplificar los cálculos y que la persona que lo está usando no tenga que pensar qué está haciendo. No estamos diciendo que no hay que enseñar algoritmos, sino que los niños tienen que llegar a dominarlos entendiendo qué están haciendo.

La resolución de un cálculo por medio del algoritmo convencional es diferente cuando se considera en la enseñanza el cálculo mental como punto de partida. Quien resuelve a través del cálculo mental tiene control sobre lo que hace, elige su camino, busca la estrategia que considera más pertinente. La diversidad de formas de resolver en las que es necesario tomar decisiones respecto de cómo descomponer los números y qué cálculos parciales hacer, no suele ser desplegada por niños a los que solo se les ha presentado el cálculo algorítmico como única manera de obtener el resultado.

¿Qué tipo de trabajo matemático es necesario enseñar para el cálculo mental?

Uno de los aspectos esenciales en el aprendizaje de la matemática es construir el sentido de los conocimientos. Es la actividad de resolver problemas la que posibilita esa construcción, del mismo modo que lo ha hecho la comunidad de matemáticos en cada momento y a lo largo de la historia. Se trata de problemas que constituyen un verdadero desafío para los alumnos y que los pone en la necesidad de revisar las herramientas conceptuales que tienen disponibles porque les ofrece cierta resistencia o grado de dificultad. Los niños, poniendo en juego sus viejos conocimientos, ensayan soluciones, establecen nuevas relaciones, toman decisiones sobre los caminos a tomar y producen nuevas respuestas que corresponden a nuevos conocimientos más avanzados.

Los problemas no necesariamente se plantean a partir de un enunciado que se refiere a la vida cotidiana o a un contexto particular. Si se plantea la enseñanza del cálculo a través de cálculos mentales, es posible afirmar que existen diferentes maneras para resolverlos y que se puede elegir la forma que mejor se adapta a cada situación y a cada persona, en función de los números que están en juego. Por eso, desde esta concepción didáctica, se plantea que cada cálculo constituye un problema por resolver.

Las decisiones sobre los pasos a seguir quedan a cargo del alumno que es quien sostiene el control sobre los propios procedimientos. El análisis del cálculo que los niños realizan mientras resuelven empleando sus conocimientos disponibles sobre los números y las operaciones, les permite anticipar y controlar los resultados favoreciendo la construcción de criterios de validación[1].

Nos parece importante recalcar que ambos tipos de cálculo no se oponen sino que se enriquecen mutuamente. El siguiente cuadro sintetiza algunas de las diferencias y similitudes entre ambos tipos de cálculo:

	Cálculo algoritmizado	**Cálculo mental**
Tipos de resultados	Exactos.	Exactos o aproximados.
Datos numéricos (I)	Es independiente de ellos.	Depende de ellos pues, son analizados para determinar los caminos a seguir.
Datos numéricos (II)	Considera sus cifras aisladas.	Lo considera de manera global.
Escritura de procedimientos	Es necesaria.	Es necesaria en muchos casos y muy conveniente en otros para explicitar la manera de pensar.
Apelación a propiedades de las operaciones	Una vez automatizados no es necesario tenerlas en cuenta.	Fundamentales en la elección de las estrategias. Las propiedades, en general, se traducen en estrategias de resolución

[1] Los criterios de validación permiten establecer la pertinencia de las decisiones tomadas en torno a los procedimientos, las relaciones y las formas de representación utilizadas.

Luego, el cálculo mental le da sentido al cálculo algorítmico, ya que los algoritmos provienen de alguna técnica de cálculo mental. Es por ello que en el Diseño Curricular se propone trabajar con cálculo mental antes que con los algoritmos.

¿Cómo introducir en el aula el trabajo con el cálculo mental?

Para instalar en el aula un trabajo sobre el cálculo mental es necesario que el maestro promueva la construcción de un repertorio de cálculos memorizados en el que los niños puedan apoyarse para resolver nuevos cálculos. Por ejemplo, para calcular 4.125 + 4.175, pueden basarse en resultados memorizados de sumas de múltiplos de 1.000 de cuatro cifras (4.000 + 4.000) y de sumas que dan 100 (25 + 75), para finalmente usarlos en la suma:

4.125 + 4.175 = 4.000 + 100 + 25 + 4.000 + 100 + 75
= 8.000 + 200 + 100 = 8.300

O bien, pueden realizar otras descomposiciones, como por ejemplo:

4.125 + 4.175 = 4.125 + 75 + 4.000 + 100
= 4.200 + 4.000 + 100
= 8.200 + 100 = 8.300

El Diseño Curricular propone que la construcción de este repertorio se inicie desde los primeros contactos de los alumnos con las operaciones matemáticas y que en los años sucesivos se recuperen y amplíen los cálculos que van memorizando. Si al llegar al Segundo Ciclo, los niños no hubieran enfrentado aún problemas que requieran el uso de estrategias de cálculo mental, el maestro de Cuarto año tendrá la tarea de dar oportunidades para que inicien esta construcción y avancen en las estrategias que utilizan. Podrá comenzar proponiendo sumas que son fáciles de memorizar, por ejemplo, adición de números iguales o de dígitos distintos entre sí y restas asociadas a esas sumas (8 + 9 = 17, entonces 17 – 8 = 9), complementos a 10, sumas y restas de múltiplos de 10 y de 100, sumas y restas de múltiplos de 5, sumas y restas de 10 y 100 a cualquier número de una o dos cifras, etc.[2]

El maestro puede propiciar la sistematización de los cálculos que los alumnos van memorizando a través de diferentes situaciones. Organizar y sistematizar los cálculos permite tomar conciencia de los que ya conocen y de los que están aprendiendo.

Por ejemplo, escribir carteles con los cálculos que "ya saben" para ser completados a medida que la lista se va extendiendo, o jugar a las cartas y registrar, posteriormente, los cálculos nuevos que recuerdan después de haber jugado[3]. Estas listas, que pueden ser copiadas en sus carpetas, les servirán de consulta para resolver nuevos cálculos: por ejemplo, los resultados de 1.500 + 1.500 y de 70 + 30 les resultarán de utilidad para resolver 1.570 + 1.530. También pueden analizar cálculos para dar consejos a un compañero sobre cómo hacer para acordarse de los resultados, o elaborar colectivamente conclusiones que sirvan a todos para recordar más cálculos, registrando ideas como las siguientes: si a mil y algo le restás ese algo siempre te queda mil o siempre que sumás 1.000 a un número de cuatro cifras te cambia el de los miles o para acordarte de más multiplicaciones podés dar vuelta los números de las que ya sabés, 3 x 8 es lo mismo que 8 x 3.

Este tipo de trabajo oral, de reflexión, permite tomar conciencia de cómo pensaron, difundir para toda la clase los razonamientos de algunos niños, y a la vez, iniciar un tratamiento más general de los cálculos, ya no refiriéndose a uno en particular, sino a un conjunto de cálculos que comparten ciertas condiciones, lo que permite reutilizarlos.

El repertorio aditivo para trabajar en Segundo Ciclo puede incluir cálculos como los siguientes:

---

[2] Para ampliar el estudio sobre esta clase de situaciones, recomendamos la lectura del documento: DGCyE. Pcia. de Bs. As., DPEP (2009): "Cálculo mental. Propuestas para trabajar en el aula: sumas y restas". Disponible en: www.abc.gov.ar.

[3] El docente encontrará juegos de este tipo, desarrollados en: DGCyE. Pcia. de Bs. As., DPEP (2009): "Los juegos y el cálculo mental". Disponible en: www.abc.gov.ar.

- sumas del mismo número, con múltiplos de 10, de tres y cuatro cifras (250+250, 1500+1500, 800+800: 8 cienes más 8 cienes son 16 cienes, 1.600)

- sumas y restas que dan 1.000 (1.820-820, 300 + 700: 3 cienes más 7 cienes son 10 cienes, mil).

- sumas y restas de múltiplos de 1.000 de cuatro cifras (3.000+4.000, 9.000-2.000, 9 miles menos 2 miles son 7 miles, 7.000).

- sumas y restas de múltiplos de 1.000, de cuatro cifras a cualquier número (3.456+1.000, 34+2.000, 6.543-4.000).

- restas que den múltiplos de 1.000 de cuatro cifras (9.756-756).

- sumas de “miles”, “cienes” y “dieces”, de distinta cantidad de cifras (4.000+600+20, 3.000+200+30+6).

Si los alumnos aún no estuvieran en condiciones de enfrentar este tipo de cálculos, el docente puede comenzar por números más pequeños como:

- sumas de números iguales y de múltiplos de 10 entre sí (15+15, 60+60: 6 dieces más 6 dieces, 12 dieces, 120).

- sumas y restas que dan 100 (30+70, 125-25).

- sumas y restas de múltiplos de 10 y de 100 (40+60, 100-40, 100+400, 500-300).

- sumas y restas de múltiplos de 5 (25+15: 25 más 5 es 30, 30 más 10 es 40).

- sumas de múltiplos de 10 y de 100 más otro número (50+8, 500+8, 700+54).

- sumas y restas de 10 y 100 a cualquier número de una, dos o tres cifras (456+10, 456+100, 780-10, 780-100: 7 cienes y algo menos cien, son 6 cienes y algo, 680).

Las situaciones de trabajo con la tabla pitagórica[4] favorecen la construcción de un repertorio de cálculos multiplicativos a partir del análisis de las regularidades y propiedades de la multiplicación y la división[5]. Los niños pueden completar la tabla focalizando en algunas relaciones, por ejemplo:

- la columna y la fila de un mismo número[6]:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0							**0**				
1							**6**				
2							**12**				
3							**18**				
4							**24**				
5							**30**				
6	**0**	**6**	**12**	**18**	**24**	**30**	**36**	**42**	**48**	**54**	**60**
7							**42**				
8							**48**				
9							**54**				
10							**60**				

[4] La tabla pitagórica es un cuadro de doble entrada en el que se sintetizan los productos de las tablas de multiplicar del 0 al 10.

[5] Para profundizar en el uso de la tabla pitagórica en el aula, remitimos a la lectura del documento: DGCyE Pcia. de Bs. As. DPEP (2009): "Cálculo mental. Propuestas para trabajar en el aula: multiplicación y división". Disponible en: www.abc.gov.ar

[6] Las filas y columnas de un mismo número contienen los mismos resultados porque la multiplicación es conmutativa: 6 x 1=1 x 6, 6 x 2=2 x 6, etc.

- la columna del 9 calculando la suma de las del 4 y el 5[7]:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0					**0**	**0**				**0**	
1					**4**	**5**				**9**	
2					**8**	**10**				**18**	
3					**12**	**15**				**27**	
4					**16**	**20**				**36**	
5					**20**	**25**				**45**	
6					**24**	**30**				**54**	
7					**28**	**35**				**63**	
8					**32**	**40**				**72**	
9					**36**	**45**				**81**	
10					**40**	**50**				**90**	

O bien, la columna del 6 calculando el doble de la del 3, entre otras. También puede proponerse a los alumnos reflexionar sobre otras relaciones que se presentan en la tabla (productos que se repiten: 3 x 8 = 4 x 6= 6 x 4 = 8 x 3 = 24, productos terminados en 0, relaciones entre las tablas del 5 y del 10), usar los productos de la tabla para resolver divisiones, etc.

Resultados aproximados

Estimar o averiguar aproximadamente cuánto va a dar un cálculo puede ser una respuesta suficiente en algunos problemas que no requieren de una respuesta exacta. Además la estimación es un recurso necesario

[7] Aquí se pone en evidencia la propiedad distributiva de la multiplicación, 2 x 9 = 2 x (4 + 5)= 2 x 4 + 2 x 5.

para anticipar y controlar resultados de cálculos obtenidos mediante otra estrategia.

Desde el primer ciclo, los niños pueden resolver problemas y cálculos de respuesta aproximada para explorarlos e iniciar un análisis que será profundizado más adelante. Al proponer problemas como el siguiente:

En un camión entran 500 bidones de agua. Ya cargaron 250 y quieren cargar 330 más, ¿hay lugar para todos los bidones?

Los niños suelen intentar buscar una respuesta exacta, pero el docente puede orientar la reflexión para mostrar que es suficiente con estimar el resultado y que esto puede hacerse de diferentes maneras: 200+300 ya es 500, los números del problema son mayores, así que se pasan, o bien, 250+250 es 500 y 330 es mayor que 250, no alcanza el lugar para tantos.

Para promover el uso de estrategias de cálculo estimativo, el maestro puede presentar situaciones que lo favorezcan o sugerir a los alumnos que piensen en los números "redondos" más cercanos. La incorporación de estas estrategias ayudará a que los niños se manejen con mayor independencia, puedan controlar su trabajo y evitará que acudan al docente en forma permanente para que sea él quien decide si hicieron bien la tarea. Por ejemplo:
- *Sin hacer la cuenta, decidí cerca de qué número van a dar los siguientes cálculos:*

420 + 196 =	*500*	*600*	*700*
309 + 403 =	*300*	*500*	*700*
720 – 219 =	*600*	*500*	*400*

Para resolver 420 + 196 los niños pueden pensar en 400 + 200 = 600, y establecer que el resultado va a estar cerca de 600.

- *Marcá con una cruz entre qué números, aproximadamente, va a estar el resultado de cada cálculo, sin resolverlos:*

	Menos de 1.000	*Entre 1.000 y 10.000*	*Más de 10.000*
699 x 50			
599 x 300			
3740 : 11			

Para este problema pueden redondear alguna de las cantidades; por ejemplo, considerar que 699 está cerca de 700, y como 700 x 50 = 35.000, es mayor que 10.000. También pueden descartar la opción "menos de 1.000", considerando que 600 x 10 = 6.000, que ya es mayor que 1.000, y en la multiplicación en cuestión ambos factores son mayores que en ésta.

Las estimaciones y aproximaciones cumplen una función importante en la anticipación de resultados de cálculos exactos para controlar si el resultado obtenido es razonable. Esta función, como se verá más adelante, cobra relevancia en el trabajo con los algoritmos.

Por ejemplo, para determinar la cantidad de cifras del cociente, antes de realizar una división, de tal manera de encuadrarlo entre números naturales:

¿Entre qué números estará el cociente de 3.822 dividido 8?, ¿cuántas cifras va a tener?

Se trata de realizar una primera anticipación del tamaño del cociente, encuadrándolo entre las potencias de base diez. Los alumnos pueden apoyarse en la multiplicación del divisor por la unidad seguida de ceros para ensayar cocientes redondos posibles:

- si el cociente fuera 100, entonces 8 entra 100 veces en el dividendo. Esto significa que el dividendo (3.822) contiene 100 veces 8, 800. Pero vemos que 800 está "lejos" de 3.822, por lo que 8 entra más veces y el cociente tiene que ser mayor que 100.

- si el cociente fuera 1000, entonces 8 entra 1000 veces en el dividendo. Esto significa que el dividendo (3.822) contiene 1000 veces 8, 8000. Pero vemos que 8000 “se pasa” de 3.822, por lo que 8 entra menos veces y el cociente tiene que ser menor que 1000.

De este modo, el cociente será mayor que 100, pero no podrá ser 1.000. Como todos los números que son mayores que 100 y menores que 1000 tienen 3 cifras, puede decirse, entonces, que el cociente tendrá tres cifras, pero no podrá tener cuatro.

Usar los cálculos memorizados

En forma simultánea a la memorización de cálculos el docente puede proponer situaciones en las que se usen los resultados como apoyo para desarrollar nuevas estrategias de cálculo mental y resolver nuevos cálculos. Este trabajo favorece el despliegue de composiciones y descomposiciones basadas en los conocimientos que los niños van construyendo sobre las operaciones y sobre el sistema de numeración decimal. Por ejemplo, para resolver el cálculo 750 + 199, los alumnos pueden pensar 750 + 199 = 750 + 200 – 1 = 950 – 1 = 949. O bien, para el cálculo 652 – 602 se retoman cuestiones vinculadas al valor posicional, ya que pueden establecer que el resultado es 50 porque el 5 de 652 es 50.

Los problemas que propician el uso del repertorio multiplicativo permiten otras descomposiciones:

Calculá mentalmente:			
4.000 x 2	***400 x 20***	***4 x 2.000***	***120 x 15***

En los tres primeros cálculos los niños pueden utilizar el resultado 4 x 2 y hacer uso de sus conocimientos sobre el sistema de numeración: 4.000 × 2= 4 × 1.000 × 2= 4 × 2 × 1.000= 8 × 1.000, que son 8 miles, es decir 8.000.

Resolver 120 x 15 requiere que, por ejemplo, calculen productos parciales como: 120 x 10 y 120 x 5 pensando en que 15 veces 120 es la suma de 10 veces 120 (120 × 10) y 5 veces más 120 (120 × 5), es decir 120 × 15 = 120 × 10 + 120 × 5, aunque no se exprese de este modo, o

100 x 15 y 20 x 15 pensando que 120 veces 15 es la suma de 100 veces 15 (15 x 100) y 20 veces más 15 (15 x 20), o bien: 100 x 10, 100 x 5, 20 x 10 y 20 x 5, que provienen de la descomposición de los dos números involucrados (100 + 20 y 10 + 5) o de la utilización de la noción de multiplicación como sumas reiteradas. Si bien también es cierto que 120× 15= 88 × 15 + 32 × 15, se trata de una igualdad correcta que no sirve para los fines del cálculo mental debido a que los productos parciales (88 × 15 y 32 × 15) no forman parte del repertorio memorizado.

Otra posibilidad para favorecer el uso de cálculos memorizados a través de problemas que proponen utilizar cálculos dados para resolver otros es la siguiente:

Si sabemos que 123 + 457 = 580, determiná los resultados de los siguientes cálculos <u>sin hacer las cuentas</u>:
a) 133 + 457
b) 1.230 + 4.570
c) 1.123 + 457

En el caso a), se apunta a que los niños reconozcan que para resolver 123 + 457 pueden utilizar el resultado anterior, dado que 133 = 123 + 10. De este modo,

133 + 457 = 10 + 123 + 457
= 10 + 580 = 590

En el caso b), se propicia que usen el cálculo dado y se apoyen en sus conocimientos sobre el valor posicional en nuestro sistema de numeración, para inferir que 1.230 + 4.570 es la suma de 123 dieces más 457 dieces, que son 580 dieces, es decir 5800. En el caso c), en forma similar al caso a), se intenta que reparen en que 1.123 = 1.000 + 123, por eso:

1.123 + 457 = 1.000 + 123 + 457
= 1.000 + 580 = 1.580

Otro problema de este tipo podría ser:

Sabiendo que 1. 600 : 10 = 160, <u>sin hacer las cuentas</u> averiguá cuánto es 1. 600 : 20 y 1. 600 : 40.

Aquí los alumnos pueden recuperar las relaciones establecidas en la tabla pitagórica sobre dobles y mitades: “si divido por el doble me da la mitad”, también pueden verificar utilizando los cálculos memorizados 16 : 2 y 16 : 4 y agregando ceros. Pueden usar la noción de división: 1.600 : 10 = 160, significa que 10 entra 160 veces en 1.600 o que se pueden formar 160 grupos de 10. Si se quiere dividir a 1.600 por 20, se busca armar grupos de 20. Como se pueden armar 160 grupos de 10, entonces se podrán armar 80 grupos de 20: 1.600 = 160 × 10 = 80 × 2 × 10 = 80 × 20. Por lo tanto, 1.600 : 20 = 20. Este modo de pensar el cálculo se vincula con la propiedad de que en un producto, al duplicar uno de los factores, el otro debe reducirse a la mitad para que no cambie el resultado.

Hacia el reconocimiento de las propiedades de números y operaciones

Las maneras en las que se componen o descomponen los números para cada cálculo involucran propiedades que los alumnos ponen en juego desde el primer ciclo en forma implícita y más tarde en forma explícita.

Por ejemplo, para multiplicar 2.250 x 4, los alumnos de Cuarto año pueden resolver 2.000 x 4 y 250 x 4 para sumar posteriormente ambos resultados, sin necesidad de nombrar las propiedades que están utilizando. En Quinto año es deseable que comiencen a identificar las propiedades asociativa, distributiva y conmutativa, así como a reconocer sus ocasiones de uso para diferentes cálculos mentales, al utilizar las descomposiciones como: 2.250 x 4 = 2.250 x 2 x 2 ó 2.250 x 4 = 2.250 x 10 – 2.250 x 6, etc.

El siguiente problema muestra un ejemplo de cómo los alumnos pueden hacer uso implícito de propiedades de las operaciones:

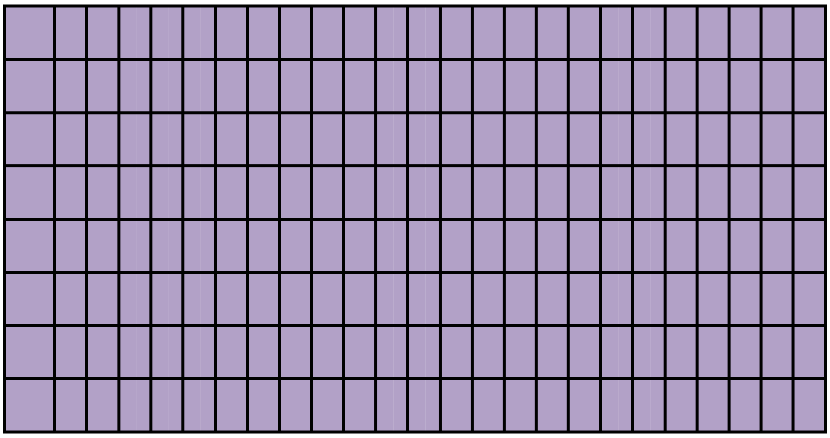
Sabiendo que 8 x 25 = 200, encontrá el resultado de cada uno de los siguientes cálculos, <u>sin hacer la cuenta</u>:

16 x 25 80 x 25 24 x 25 9 x 25 6 x 25

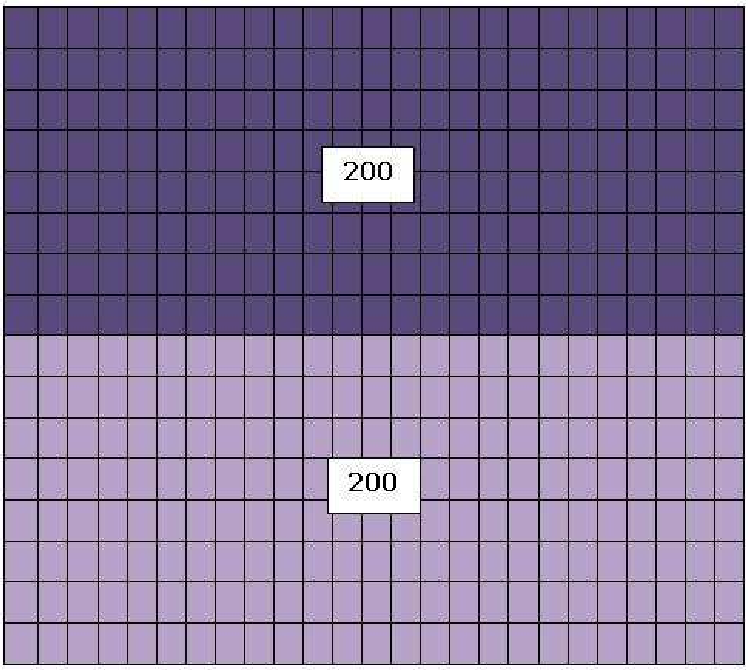
Para calcular 16 x 25, los niños pueden calcular el doble de 200, puesto que 16 x 25 = 2 x 8 x 25 = 2 x 200. En este tipo de razonamiento utilizan de modo implícito la propiedad asociativa de la multiplicación.

También es posible interpretar en forma geométrica la transformación del cálculo 16 x 25 en 2 x 8 x 25 para poder establecer relaciones con el cálculo que sirve de dato para resolver los otros.

El cálculo dado, 8 x 25 = 200, puede pensarse como un rectángulo dividido en 200 cuadraditos, dispuestos en 8 filas y 25 columnas:



Al analizar el cálculo 16 x 25 y descomponer el 16 en 2 x 8, se está duplicando la cantidad de filas del rectángulo original y manteniendo la misma cantidad de columnas (25). De este modo, el nuevo rectángulo, dispuesto en 16 filas y 25 columnas, resulta 2 veces el rectángulo original y por eso, con 400 cuadraditos:



Para el cálculo de 9 × 25 es posible sumar 200 + 25; para 6 x 25, se puede resolver 200 − 50. Estas estrategias se basan en la propiedad distributiva de la multiplicación, ya que:

- 9 veces 25 puede pensarse como 8 veces 25 más 1 vez más 25:

  9 x 25 = 8×25 + 1×25 = 200 + 25

- 6 veces 25 que es 8 veces 25 menos 2 veces 25:

  6 × 25 = 8 × 25 − 2 × 25 = 200 − 50

Las instancias de análisis colectivo de problemas como éstos serán una buena oportunidad para explicitar las propiedades de las operaciones.

Otros problemas propician el análisis del alcance de estas propiedades. Por ejemplo:

Para resolver el cálculo 1. 320 : 12, dos chicos pensaron así:
a) 1. 320 : 12 = 1.200 : 12 + 120 : 12
b) 1. 320 : 12 = 1.320 : 10 + 1.320 : 2
¿Son correctas las dos formas de resolver?

El análisis de la validez de ciertas propiedades favorece que los alumnos trabajen de modo explícito sobre errores usuales en el uso de las mismas. En este ejemplo, se apunta a que reconozcan que no es lo mismo descomponer el dividendo que descomponer el divisor cuando se utiliza la propiedad distributiva en la división. En el caso a) la descomposición del dividendo 1.320 en 1.200 + 120 resulta adecuada, dado que 1.200 : 12 = 100 y 120 : 12 = 10, al sumar ambos resultados 100 + 10, se obtiene 110, que es el resultado de 1.320 : 12.

Dividir por 12 puede pensarse como buscar la cantidad de doces que contiene el dividendo y esto puede hacerse por partes, descomponiendo el dividendo en la cantidad de sumas que se quiera. En cambio en el caso b), al descomponer el divisor 12 en 10 +2 y dividir por separado 1. 320 : 10 = 132 y 1. 320 : 2 = 660, se obtiene como resultado 792, lo que muestra que la propiedad distributiva de la suma con respecto a la división no siempre es válida.

Resulta indispensable, entonces, que el docente organice un trabajo de reflexión colectiva sobre los cálculos considerándolos como objeto de estudio en sí mismos, para permitir a los alumnos la validación de recursos propios, la incorporación de estrategias de otros y el análisis de relaciones y propiedades del sistema de numeración y las operaciones.

¿Para qué usar la calculadora[8]?

En ocasiones, docentes y padres se oponen al ingreso de la calculadora a las aulas porque consideran que supone un reemplazo del uso de otros recursos de cálculo. Sin embargo, la selección por parte del alumno de la manera de calcular más conveniente forma parte de lo que se propicia desde la escuela. Usar la calculadora es un recurso por el que los alumnos pueden optar cuando la situación o los números involucrados en los cálculos lo requieren.

Por otra parte, además de presentarse como una estrategia de cálculo posible de ser elegida, la calculadora puede ser una herramienta para plantear problemas que permitan instalar prácticas anticipatorias e investigar propiedades de los números y de las operaciones. Las relaciones que los niños establecen en el marco de estos problemas enriquecen el dominio del cálculo mental.

Usando la calculadora, los alumnos también pueden verificar los resultados obtenidos por medio de estrategias de cálculo mental, estimativo y algorítmico, por ejemplo:

- Sofía dice que 375 + 425 da más de 800, ¿tiene razón? Verificá con la calculadora.
- Calculá mentalmente cuál de estos resultados puede ser el de 125+135 y verificá con la calculadora: 150 260 355

[8] DGCyE. Pcia. de Bs. As., Dirección de Educación General Básica (2001): "Aportes didácticos para el trabajo con la calculadora en los tres ciclos de la EGB". Gabinete Pedagógico Curricular – Matemática-. Disponible en: www.abc.gov.ar

Promover este trabajo de verificación autónoma evita que los niños recurran en forma exclusiva a la figura del maestro para validar los resultados.

Relaciones entre el cálculo mental y el cálculo algorítmico

Que los alumnos aprendan las "cuentas" suele ser la expectativa privilegiada de padres y de muchos maestros para el área de matemática. Sin duda, los algoritmos convencionales son muy útiles en gran cantidad de ocasiones, a pesar de que en la actualidad su utilización se vea limitada por la expansión del uso de la calculadora.

El cálculo algorítmico forma parte del conjunto de estrategias de cálculo que la escuela primaria debe comunicar, aunque desde este enfoque no se propone la adquisición de una serie de pasos mecánicos sino un trabajo de exploración y reflexión que apunta a considerar a los algoritmos como objeto de estudio, a develar su funcionamiento y las propiedades y descomposiciones que ocultan. Así, los algoritmos resultan una prolongación del trabajo de razonamiento que se realiza con el cálculo mental.

En general, se conoce un solo algoritmo para cada operación y dado el automatismo con que se aprende y se utiliza, pocas veces puede validarse su funcionamiento. Sin embargo, existen muchos algoritmos para una misma operación: a lo largo de la historia unos han ido reemplazando a otros en distintos momentos, incluso hoy se usan algoritmos diferentes a los nuestros en otros países.

La enseñanza de uno u otro en particular es una decisión tomada en base a diferentes criterios y es necesario tener en cuenta que el algoritmo de uso convencional que nos resulta "natural" es "uno más" entre otros posibles.

El algoritmo constituye una más de las estrategias por las que se puede optar para resolver un cálculo. Para comprender su funcionamiento se requiere que los niños dispongan de un conjunto de herramientas de cálculo mental, de un repertorio de cálculos con números redondos, de estrategias de cálculo estimativo y de uso de la calculadora.

El inicio del tratamiento del cálculo algorítmico se propone en el Diseño Curricular desde Primer Ciclo. En Segundo año los alumnos comienzan a analizar diferentes algoritmos de suma y resta y a utilizarlos progresivamente en la resolución de problemas cuando los números lo requieren.

A partir del uso de los recursos de cálculo mencionados anteriormente, el docente de Primer Ciclo puede presentar una nueva organización de la escritura de esos cálculos ubicados en los algoritmos de suma y resta. Los alumnos ya han venido produciendo e interpretando

Para 43 – 25	Para 289 + 234
43= 40+3=30+10+3 25= 20+5 3 13 30 13 40 3 ---- 30 13 43 43 -20 -5 ---- -20 - 5 -25 -25 10 + 8 = 18 18 18	100 10 11 2 8 9 289 +2 3 4 +234 5 2 3 523

escrituras horizontales, la presentación de esta disposición constituirá una oportunidad para analizar una nueva organización posible para los cálculos. Además, es importante promover un análisis comparativo entre las descomposiciones usadas para cálculos mentales y aquellas que los niños utilizan, pero que no aparecen del todo escritas en el cálculo vertical. Resulta interesante también que en un comienzo circulen y convivan en la clase diferentes maneras de escribir y "de decir" los pasos intermedios del algoritmo, apoyadas en los recursos de cálculo mental. Se trata de ofrecer oportunidades de interpretar y usar escrituras diversas como las siguientes:

El docente puede proponer que los niños establezcan relaciones entre estas escrituras y el cálculo mental, por ejemplo para 43 - 25, *¿dónde está en la segunda cuenta el 30 que aparece en las otras dos?* Esta pregunta permite reflexionar sobre el valor posicional de las cifras que manipulan en los cálculos, ya que al tachar el 4 y escribir un 3 y un 13, están descomponiendo el 43 en 30 más 13, como en las otras dos cuentas.

A su vez, el cálculo estimativo, permite anticipar aproximadamente entre qué números se encontrará el resultado para controlar que sea razonable. El cálculo con calculadora puede usarse también para verificar los resultados obtenidos.

Por otra parte, es necesario promover la reflexión acerca de la pertinencia o no de usar un algoritmo en función del tamaño y la “redondez” de los números (por ejemplo, no es imprescindible para 250 + 250 o para 2500 – 500). Sin esta reflexión seguiremos encontrando niños que escriben cuentas paradas para resolver cálculos como 20 + 10 o 100 + 60, como si no tuviesen otra herramienta que el algoritmo para hallar el resultado. La pregunta “¿Qué me conviene hacer?” no debería estar ausente de la clase si queremos que nuestros alumnos aprendan a tomar decisiones.

Es esperable que los niños se vayan afianzando progresivamente en el dominio de los algoritmos de suma y resta, y en segundo ciclo los utilicen fluidamente en problemas en los que es pertinente hacerlo.

Hacia el desarrollo de algoritmos para la multiplicación y la división

En Tercer año se propone iniciar un trabajo con los algoritmos convencionales de multiplicación y división. Cuando los niños han aprendido a utilizar diferentes procedimientos de cálculo mental apoyándose en descomposiciones y tienen un cierto dominio de los resultados de la tabla pitagórica y de la multiplicación por la unidad seguida de ceros, se encuentran en mejores condiciones de introducirse en el cálculo algorítmico de estas operaciones. El maestro puede proponer que elaboren y analicen algoritmos mediante escrituras que representan diferentes relaciones establecidas a través de cálculos mentales, por ejemplo:

			12
145	145	145	145
X4	x4	x4	x4
400 (de 4 x 100)	20 (5x4)	160 (4 x35)	580
+160 (de 4 x 40)	+160 (40 x4)	+400 (4 x 100)	
20 (de 4 x 5)	400 (100 x4)	580	
580	580		

En el trabajo colectivo es importante que el maestro proponga comparar las escrituras de los productos intermedios y analizar si se obtienen los mismos resultados con las diferentes estrategias. Del mismo modo que con los algoritmos de suma y resta, se requiere reflexionar acerca de cuándo conviene usar el algoritmo de la multiplicación y cuándo no.

El tratamiento del algoritmo de la división se presenta de modo semejante. El docente puede proponer explorar nuevas formas de organizar la escritura de los cálculos mentales aprendidos, con un formato desplegado, similar al utilizado en el algoritmo convencional pero en el que se explicitan las multiplicaciones y restas parciales, para hacerlas más transparentes:

678		5
-500	100x5	100 ------- 5 x 100 = 500 --- quedan 178
178		
-150	30x5	30 --------5 x 30 = 150 --- quedan 28
28		
-25	7 x 5	5 --------5 x 5 = 25 --- quedan 3
3		135

O bien:

678	5
-500	100 + 30 + 5
178	135
-150	
28	
-25	
3	

O bien:

678	5
-500	135
178	
-150	
28	
-25	
3	

Para el Segundo Ciclo, el Diseño Curricular propone continuar analizando, comparando y utilizando cálculos algorítmicos de multiplicación y división por una y por dos cifras, mediante escrituras que representan las diferentes relaciones establecidas a través de cálculos mentales:

			1
			12
135	135	135	135
X25	x25	x 25	x25
2500 (de 25 x 100)	1350 (135 x10)	675 (5 x 135)	675 (5 x 135)
+ 750 (de 25 x 30)	+1350 (135 x10)	+ 2700 (20 x 135)	+270 - (2 x 135)
125 (de 25 x 5)	675 (135x5)	3375	3375
3375	3375		

Del mismo modo que en Primer Ciclo, se requiere un análisis colectivo en el que se comparen los cálculos de cada representación, por ejemplo:

¿Qué cálculos se hicieron para obtener 1350 en la segunda cuenta?

Aquí es necesario que identifiquen que el 25 se descompone en 10+10+5 y que el 1350 resulta de la multiplicación del primer factor, 135, por cada uno de los 10 de la descomposición de 25.

¿Por qué 1350 está dos veces en la segunda cuenta y no aparece en las otras?

En este caso se espera que consideren que en las otras cuentas el 25 se descompone de maneras diferentes, por ejemplo en la tercera cuenta el 25 se descompone en 20+5 y el 2700 representa el producto de multiplicar el 20 por 135. Pero 2700 = 20 × 135, que es la suma de 20 veces 135 y puede agruparse en dos sumas de 10 veces 135: 2700 = 10 × 135 + 10 × 135. La última igualdad muestra que en el tercer cálculo aparecen los dos 1350 sumados.

¿Qué cálculo se hizo para obtener 125?

Al analizar la primera cuenta, pueden reparar en que el 135 se descompone en 100 + 30 + 5 y luego se multiplica por cada uno de los sumandos en que se descompone a 25, 20 + 5. El 125 resulta de multiplicar 25 por 5.

¿Dónde está el 2700 de la tercera cuenta en la última? ¿Y en la segunda?
Se propone analizar el significado del lugar que se deja vacío para las decenas en el algoritmo de la multiplicación realizado en la cuarta cuenta, comparándola con las otras que explicitan el valor posicional de las cifras.

Este trabajo permite identificar qué multiplicaciones se realizan "en cada renglón" al multiplicar por números de dos cifras escribiendo ceros sin "dejar el lugar", etc.

En el caso de la división, este modo de plantear los cálculos no hace necesario distinguir entre las cuentas de dividir por una o más cifras: se inicia haciendo una estimación del cociente, utilizando multiplicaciones por 10, 100, 1000, etc. y sus múltiplos, y se explicitan las operaciones que se van realizando en los pasos intermedios: multiplicaciones, restas y sumas. Por ejemplo:

7490		**24**
-2400	100x24	100
5090		
-2400	100x24	100
2690		
-2400	100x24	100
290		
-240	10x24	+ 10
50		
- 24	1x24	1
26		
-24	1x24	1
2		312

A lo largo del segundo ciclo, van analizando la posibilidad de utilizar el mayor factor posible en cada caso para ir "acortando la cuenta" y aproximándose al algoritmo de uso convencional. En el ejemplo, podrán usar 300 en lugar de tres veces 100 y 2 en lugar de dos veces 1:

7490		24
-7200	300x24	300
290		
-240	10x24	+10
50		
- 48	2x24	2
2		312

La estimación para anticipar las cifras del cociente permite que los niños mantengan el control del valor de la cifra que van agregando en él. En este caso, el cociente es mayor que 100 (24 x 100 = 2.400) y menor que 1.000 (24 x 1.000 = 24.000), está entre 100 y 999, entonces tiene tres cifras. De este modo, pueden hacer la cuenta dejando ya lugar para las cifras del cociente:

7490		24		
-7200	300x24	3	1	2
		cienes	dieces	unos
290				
-240	10x24			
50				
- 48	2x24			
2				

El maestro puede permitir que los alumnos elijan qué cálculos intermedios registrar y cuáles hacer mentalmente. Contar con esta libertad favorece la adquisición de autonomía por parte de los alumnos, quienes deberán tomar decisiones en base a sus propios criterios y conocimientos.

El trabajo reflexivo sobre los algoritmos hasta aquí planteados, permite a los niños desarrollar una mejor comprensión y ejercer un mayor control sobre su funcionamiento. De este modo, se prioriza el razonamiento de los cálculos a la velocidad, ya que para los casos en que ésta es imprescindible, la calculadora es el mejor recurso[9].

¿Cuál es el recurso más conveniente?

Un aspecto esencial vinculado con la autonomía de los alumnos para hacer cálculos es promover la selección de una estrategia conveniente para la situación que se les presenta. Esta idea atraviesa todo el trabajo con el cálculo mental en la escuela primaria y en la matemática en general. En las diversas situaciones que requieren de cálculo mental, algorítmico, aproximado y con calculadora, los alumnos pueden elegir el tipo de cálculo más pertinente, justificar y validar sus respuestas y considerar la razonabilidad de los resultados obtenidos.

Además el docente puede presentar problemas cuyo propósito específico sea que el alumno elija el recurso más adecuado, de acuerdo al tamaño y la "redondez" de los números. Por ejemplo:

- ¿Cuáles de estos cálculos son más rápidos de resolver usando calculadora y cuáles mentalmente?

410 x 3 2. 000 x 13 2. 353 : 12 6. 600 : 6

- ¿Cuáles de estos cálculos son más rápidos de resolver mentalmente y cuáles con la cuenta?

3. 244 x 22 160 x 90 3. 000 x 60

Otra cuestión interesante para considerar con los alumnos, es que hay transformaciones correctas de los cálculos pero que no son útiles para el cálculo mental. Por ejemplo, 487 + 874 = 487 + 875 – 1 es una igualdad verdadera, pero no es conveniente usarla porque no resulta ningún cálculo que pueda resolverse mentalmente. El propósito de efectuar

[9] Recomendamos la lectura de los documentos: DGCyE. Pcia. de Bs. As. Dirección de Educación General Básica (2001): "Orientaciones Didácticas para la Enseñanza de la División en los tres ciclos de la EGB" y DGCyE Pcia. de Bs. As., DPEP (2009): "Cálculo mental. Propuestas para trabajar en el aula: multiplicación y división". Ambos disponibles en: www.abc.gov.ar.

descomposiciones es que el cálculo original se transforme en uno o más cálculos que se puedan resolver a partir de los repertorios memorizados.

A modo de cierre

Hasta aquí se intentó plantear que el trabajo sobre el cálculo en el aula es un tipo de actividad que supone explorar, probar, comparar procedimientos de resolución, decidir qué estrategias utilizar, que algunas veces exige abandonar el camino elegido o la conjetura que se había elaborado para volver a empezar, que también requiere justificar y validar los resultados obtenidos. En suma, se trata de instalar en la clase este modo de hacer y de pensar que es constitutivo de la producción del conocimiento matemático.

A su vez, se procuró mostrar la diversidad de estrategias de cálculo mental que es interesante enseñar a los alumnos y la potencia que ellas tienen para lograr un dominio reflexionado de los cálculos "expertos". Es deseable que este proceso se inicie desde los primeros años y tenga continuidad a lo largo de toda la escolaridad. Sin embargo, puede suceder que al llegar al Segundo Ciclo, los niños no hayan frecuentado aún suficientes problemas que involucran cálculos mentales. El docente puede entonces, adaptar su secuencia de enseñanza, partiendo de situaciones menos complejas para que todos puedan evolucionar hacia estrategias de cálculo más avanzadas.

Por otra parte, se trató de poner en evidencia que no es posible abordar el cálculo mental en clases aisladas ni de manera ocasional, sino a través de situaciones específicamente planeadas para su enseñanza. En ellas, la intervención del maestro es crucial; él es quien propone los cálculos de manera que representen problemas por resolver, organiza las reflexiones en torno a ellos, identifica los nuevos conocimientos que circulan en la clase, los vincula con conocimientos anteriores para que se establezcan nuevas relaciones, plantea una progresión en los recursos de cálculo que se utilizan, etc. A través de este trabajo de sistematización, el docente propicia que los cálculos mentales se conviertan progresivamente en herramientas de todos los chicos.

Bibliografía

Bressan, A. M. La división por dos cifras: ¿un mito escolar?, Consejo Provincial de Educación de Río Negro, documento de la Secretaría Técnica de Gestión Curricular, área Matemática, 1998. Disponible en: www.educacion.rionegro.gov.ar

Broitman, C. *Estrategias de cálculo con números naturales*. Segundo Ciclo EGB. Buenos Aires. Santillana. 2005.

Carraher, T.; Carraher, D.; Y Schliemann, A. *En la vida diez, en la escuela cero*. México. Siglo XXI. 1991.

Dirección Provincial de Educación Primaria. Pcia. de Bs. As. (2008). "Diseño Curricular para la Educación Primaria". Primer y Segundo Ciclo. Disponible en: www.abc.gov.ar

Dirección Provincial de Educación Primaria. Pcia. de Bs. As. (2008). "La enseñanza del cálculo en primer año". Disponible en: www.abc.gov.ar

Dirección General de Educación Básica. Pcia. de Bs. As. (2001). "Aportes didácticos para el trabajo con la calculadora en los tres ciclos de la EGB" Gabinete Pedagógico Curricular – Matemática- disponible en: www.abc.gov.ar

Dirección General de Educación Básica. Pcia. de Bs. As. (2001): "Orientaciones Didácticas para la Enseñanza de la Multiplicación en los tres ciclos de la EGB", disponible en www.abc.gov.ar

Dirección General de Educación Básica. Pcia. de Bs. As. (2001): "Orientaciones Didácticas para la Enseñanza de la División en los tres ciclos de la EGB", disponible en: www.abc.gov.ar

Dirección de Gestión Curricular de la Dirección Provincial de Educación Primaria y de la Dirección de Psicología Comunitaria y Pedagogía Social (2007): Propuestas Pedagógicas para Alumnos con Sobreedad Segunda secuencia: Operaciones. Disponible en: www.abc.gov.ar

Dirección de Currícula (2005). Cálculo mental con Números Naturales. Plan Plurianual. Ministerio de Educación. GCBA. Disponible en: www.buenosaires.gov.ar

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. (1997): Documento de actualización curricular N° 4. Matemática. Dirección de Currícula. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Disponible en: www.buenosaires.gov.ar

Itzcovich, H. (coord.), Moreno, B., Novembre, A. Becerril, M. La matemática escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula. Capítulo 3. Buenos Aires. Aique. 2007.

Lerner, D. La matemática en la escuela aquí y ahora, Buenos Aires. Aique. 1992.

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación (2001). El juego como recurso para aprender. Juegos en Matemática EGB 2. Disponible en: www.me.gov.ar

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación. Aportes para el seguimiento del aprendizaje en procesos de enseñanza. Segundo ciclo. Nivel Primario. 2007.

Parra, C. y Saiz, I. *Cálculo mental en la escuela primaria* en Parra. Didáctica de Matemáticas. Bs. As. Paidós. 1994.

Parra, C. y Saiz, I. Enseñar Aritmética a los más chicos. De la exploración al dominio. Rosario: Homo Sapiens Ediciones. 2007.

Ponce, H. (2000): *Enseñar y aprender matemática*. Propuestas para el Segundo Ciclo. Bs. As. Editorial Novedades Educativas.

Quaranta, M. E.; Wolman, S. (2002): "Discusiones en las clases de matemáticas: ¿qué se discute?, ¿para qué? y ¿cómo?", en Panizza (comp.): Enseñar matemática en el Nivel Inicial y Primer Ciclo de EGB: Análisis y Propuestas. Bs. As. Paidós.

Saiz, I. "Dividir con dificultad o la dificultad de dividir", en Parra y Saiz (comp): Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones. Buenos Aires. Paidós.1994.

Wolman, S y Quaranta, M.E. “Procedimientos numéricos de resolución de problemas aditivos y multiplicativos: relaciones entre aspectos psicológicos y didácticos” en Revista del IICE Año 8, Nº 16. Bs. As. 2000.

Wolman, S. “Algoritmos de suma y resta: ¿por qué favorecer desde la escuela los procedimientos infantiles?” IICE. Año VIII, Nº 14. Bs. As. 1999.